

\*

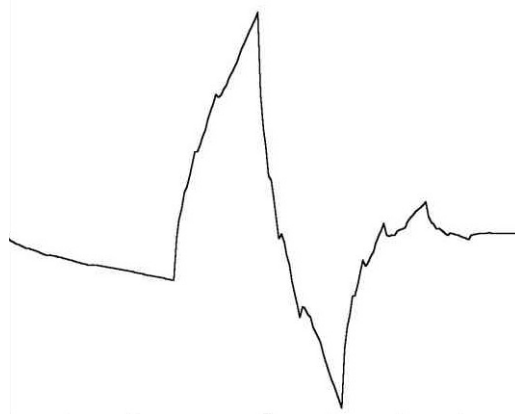
UNIVERSITÉ LILLE 1

MÉMOIRE DE MASTER 1

---

# Ondelettes à support compact de Daubechies

---



GAUTHIER DELVOYE  
Encadré par Mme CÉLINE ESSER

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Rappels et compléments</b>	<b>5</b>
1.1 Transformée de Fourier . . . . .	5
1.1.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	5
1.1.2 Formule sommatoire de Poisson . . . . .	6
1.1.3 Théorème de Paley-Wiener . . . . .	9
1.2 Frames et Bases de Riesz . . . . .	10
1.3 Produits infinis . . . . .	16
<b>2 Analyse Multirésolution</b>	<b>20</b>
2.1 Définition . . . . .	20
2.1.1 Définition temporelle . . . . .	20
2.1.2 Traduction fréquentielle . . . . .	23
2.1.3 Retour au domaine temporel . . . . .	31
2.2 Construction d'une Analyse Multirésolution à partir de l'onde- lette père $\varphi$ . . . . .	34
2.3 Algorithme en cascade . . . . .	39
2.3.1 Algorithme de décomposition . . . . .	39
2.3.2 Complexité de l'algorithme . . . . .	40
2.3.3 Algorithme de reconstruction . . . . .	41
<b>3 Régularité des bases d'ondelettes orthonormales</b>	<b>43</b>
<b>4 Bases d'ondelettes à support compact</b>	<b>49</b>
4.1 Construction de $m_0$ . . . . .	49
4.2 Conditions d'orthonormalité . . . . .	56
4.3 Ondelettes de Daubechies . . . . .	73
<b>Conclusion</b>	<b>76</b>

## Remerciements

Je tiens ici à remercier Céline Esser pour ses nombreux conseils, sans qui le travail présenté ici serait bien différent, pour le choix pertinent des références, ainsi et surtout que pour le temps passé à relire et à corriger les versions antérieurs de ce travail.

Je remercie aussi Loïc Gaillard, Antoine Delvoye et Antoine Zurek pour leurs relectures et les conseils qu'ils m'ont donné. J'espère que la lecture de ce travail sera la plus agréable possible.

# Introduction

Le traitement du signal est la discipline qui développe et étudie les techniques de traitement, d'analyse et d'interprétation des signaux. Cette discipline est aujourd'hui omniprésente et possède des applications diverses allant de la compression de données au débruitage d'un signal. L'analyse de Fourier, qui stipule entre autres que l'on peut théoriquement décomposer un signal d'énergie finie (autrement dit une fonction de carré intégrable) en fréquences puis le reconstruire à l'identique, a joué un rôle fondamental en traitement du signal. Cependant elle ne permet pas de représenter un signal à la manière d'une partition de musique, où chaque note est située à la fois en temps et en fréquence (de part sa hauteur sur la portée). Cette recherche de représentation en temps-fréquence est théoriquement limitée par le principe d'incertitude d'Heisenberg (un signal ne peut être concentré à la fois en temps et en fréquence), néanmoins on peut chercher à s'approcher de cette limite dans nos représentations d'un signal. La première tentative dans ce sens est due à Dennis Gabor qui inventa dans les années 1940 la transformée de Fourier à fenêtre glissante ou transformée de Fourier à court terme (TFCT). Là où la transformée de Fourier classique consiste à comparer le signal tout entier à des sinusoides infinies de fréquences variables, la TFCT découpe le signal en différents tronçons de mêmes tailles que la fenêtre analysante (qui reste de taille fixe), chaque tronçon va alors être comparé à des morceaux de courbes oscillantes de différentes fréquences. Si la TFCT permet une analyse temps-fréquence, elle souffre de plusieurs inconvénients. Tout d'abord le fait que la taille de la fenêtre soit fixe impose de faire des compromis : une fenêtre trop petite ne permet pas d'analyser les basses fréquences tandis qu'une fenêtre trop large perd l'information sur l'instant où se produisent les pics et discontinuités d'un signal. Secondement la TFCT ne permet pas de reconstruire un signal, contrairement à l'analyse de Fourier traditionnelle.

C'est dans ce contexte que Jean Morlet eu l'idée, au début des années 1980, de faire varier la taille de la fenêtre analysante et de laisser fixe le nombre d'oscillations, étirant et comprimant une même fonction appelée ondelette mère (car elle engendre toutes les autres fonctions analysantes). Plus l'ondelette est comprimée, plus ses oscillations le sont, ce qui produit de hautes fréquences. On peut, grâce à ces nouvelles fonctions analysantes, localiser les hautes fréquences avec des fenêtres comprimées et étudier les basses fréquences avec les fenêtres plus larges. En plus de cela la transformée en ondelettes permet de reconstruire un signal sans perte, au contraire de la TFCT. Si de plus l'ondelette mère engendre une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ , alors il n'y a plus de redondance et le nombre de coefficients à calculer lors d'une analyse par ondelette est minimisé. Le principe de l'analyse de Fourier classique et de l'analyse par ondelettes est de transformer un signal en coefficients que l'on peut analyser et manipuler et

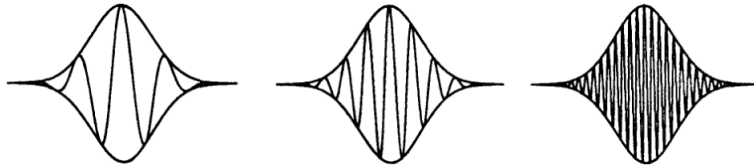


FIGURE 1 – Lors d’une analyse TFCT, la taille de la fenêtre reste constante, seul le nombre d’oscillations varie. Une petite fenêtre est ”aveugle” aux basses fréquences, trop grande pour y entrer. Une fenêtre trop large ne donne pas d’information sur les variations rapides du signal : elles sont noyées dans l’information concernant la totalité du tronçon analysé.



FIGURE 2 – Dans l’analyse en ondelettes, on comprime et étire une ondelette mère (à gauche) selon la taille de l’intervalle à étudier. Le signal est ainsi analysé à des échelles différentes. Les ondelettes larges donnent une image approximative (ou floue) du signal, tandis que les fenêtres étroites permettent de zoomer sur les détails.

qui peuvent ensuite être utilisés pour reconstruire le signal. Le stockage d’un signal peut ainsi être optimisé (les coefficients qui n’ont que peu d’influence ne sont tout simplement pas stockés). Dans le cas de l’analyse par ondelettes, les coefficients sont très sensibles aux variations du signal. Ce type d’analyse prend donc tout son sens pour détecter les pics d’un signal ou les contours d’une image (compression JPEG). Ainsi l’analyse par ondelette n’a pas pour but de supplanter l’analyse de Fourier classique mais de la compléter.

Ce mémoire va dans un premier temps présenter une méthode de construction systématique d’ondelettes engendrant des bases orthogonales : l’analyse multirésolution. Dans un second temps, nous nous intéresserons à la régularité des ondelettes. Ce point est essentiel en traitement du signal : décomposer puis recomposer un signal à partir d’ondelettes peu régulières fait apparaître des discontinuités qui n’existaient pas auparavant. La dernière partie s’intéresse à la construction de bases d’ondelettes à la fois orthogonales, suffisamment régulières et à support compact. Cette construction a été réalisée pour la première fois par Ingrid Daubechies à la fin des années 1980 et a permis d’engendrer des algorithmes très performants, le support compact des ondelettes assurant que seul un nombre fini de coefficients est non nul.

La référence principale de ce mémoire est [3]. Pour l’introduction et la compréhension du rôle des ondelettes en traitement du signal, nous renvoyons à [1].

# Chapitre 1

## Rappels et compléments

Nous présentons ici les différents outils mathématiques qui seront utilisés dans ce mémoire. La théorie des ondelettes étant issue de l'analyse de Fourier, cette dernière occupe ici une place importante. Nous nous plaçons dans le cadre des espaces de Hilbert et nous aurons besoin par endroit de notions plus souples que les bases Hilbertiennes : c'est pourquoi nous introduisons les notions de frames et de base de Riesz. À la fin de cette partie, nous rappelons quelques résultats introductifs sur les produits infinis. Ils ne serviront qu'à la fin de ce travail, dans le chapitre sur les bases d'ondelettes à support compact.

### 1.1 Transformée de Fourier

#### 1.1.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$

Pour les preuves de cette partie, nous renvoyons à [5].

**Définition 1.1.1.** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  intégrable, on définit sa transformée de Fourier par :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx. \quad (1.1)$$

Pour  $f$  intégrable, on a le lemme de Riemann-Lebesgue

**Lemme 1.1.2.** Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\hat{f}$  est bien définie et  $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$ .

Nous avons de plus les propriétés suivantes :

**Théorème 1.1.3.** La transformation  $\mathcal{F}$  sur  $L^1(\mathbb{R})$  vérifie :

$$\mathcal{F} : (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \longrightarrow (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

avec  $\mathcal{F}$  est linéaire, continue et de norme inférieure ou égale à 1 :

$$\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Si de plus  $\hat{f}$  est intégrable, on peut définir la transformée de Fourier inverse

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x} d\xi$$

On justifie l'appellation de transformée inverse par la proposition suivante :

**Proposition 1.1.4.** Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$

Cependant la condition  $\hat{f}$  intégrable n'est pas vérifiée par toutes les fonctions  $f$  intégrables. Un cadre plus adapté pour la transformée de Fourier est l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  des fonctions de carré intégrable.

**Théorème 1.1.5.** La transformée de Fourier défini en (1.1) sur  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  peut s'étendre (par densité de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ ) à l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  tout entier en  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ , avec  $\mathcal{F}$  linéaire et continue. On a de plus pour tout  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  les formules de Plancherel-Parseval :

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

*Remarque 1.1.6.* On prendra garde au fait que  $\mathcal{F}$  désigne deux applications distinctes : d'une part  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ , d'autre part  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ .

Lorsque  $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ , la fonction  $x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$  n'est pas intégrable pour une valeur de  $\xi$  fixée. La formule (1.1) n'a pas de sens.

## 1.1.2 Formule sommatoire de Poisson

Les preuves présentes dans cette sous-section sont issues de [4]. Commençons par rappeler le théorème de Fubini-Tonelli dont nous nous servirons par la suite.

**Théorème 1.1.7.** Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  deux espaces mesurés tels que les deux mesures soient  $\sigma$ -finies et soit  $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$  l'espace mesurable produit muni de la mesure produit. Si  $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$  est une application  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ -mesurable, alors les applications  $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  et  $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$  sont respectivement  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ -mesurables et

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y) = \int_X \left[ \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x)$$

$$= \int_Y \left[ \int_X f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y).$$

On suppose maintenant que  $f$  est à valeurs réelles. On désigne par  $L_{per}^1([0, 2\pi])$  l'espace des fonctions  $2\pi$ -périodiques intégrables sur  $[0, 2\pi]$  et, pour tout entier  $k$ , on appelle  $k^{ieme}$  coefficient de Fourier d'une fonction  $f \in L_{per}^1([0, 2\pi])$  le nombre complexe

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Dans la section sur l'analyse multirésolution, nous aurons besoin à plusieurs reprises du théorème suivant ainsi que du corollaire qui en découle. Cependant, avant d'énoncer ces résultats, démontrons un lemme permettant de caractériser toute fonction de  $L_{per}^1([0, 2\pi])$  par la suite de ses coefficients de Fourier, et ce même si la formule d'inversion de Fourier n'est pas définie!

**Lemme 1.1.8.** La fonction  $\Phi : \begin{cases} L_{per}^1([0, 2\pi]) & \rightarrow l^\infty(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$  est injective.

*Démonstration.* On se donne  $f \in L^1_{per}([0, 2\pi])$  telle que tous ses coefficients de Fourier  $c_k(f)$  soient nuls. On va montrer que  $f$  est nulle. Par linéarité, pour tout polynôme trigonométrique  $P : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ , on a :

$$\int_0^{2\pi} f(x)P(x)dx = 0$$

Pour  $g \in L^1_{per}([0, 2\pi])$  continue, on sait par Stone-Weierstrass qu'il existe une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes trigonométriques tendant uniformément vers  $g$ . La convergence étant uniforme, on a

$$\int_0^{2\pi} f(x)P_n(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

Ainsi  $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = 0$ , pour tout  $g \in L^1_{per}([0, 2\pi])$  continue. Enfin on construit une suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions de  $L^1_{per}([0, 2\pi])$  continues, de modules bornés uniformément par 1, qui converge presque partout vers la fonction  $sgn(f)$ . (On commence par approcher  $sgn(f)$  dans  $L^1([0, 2\pi])$  par densité des fonctions continues à support compact, puis on tronque les modules strictement supérieurs à 1, la continuité est préservée). Le théorème de convergence dominée nous donne alors :

$$\int_0^{2\pi} f(x)g_n(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f(x)sgn(f)(x)dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|dx$$

D'où  $\int_0^{2\pi} |f(x)|dx = 0$ , ainsi  $f = 0$  dans  $L^1_{per}([0, 2\pi])$ . □

Énonçons à présent le résultat principal de cette partie :

**Théorème 1.1.9.** (Formule sommatoire de Poisson)

Soit  $f$  une fonction intégrable, alors la série

$$S(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi l)$$

converge absolument pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$  et définit une fonction  $S \in L^1_{per}([0, 2\pi])$  dont les coefficients de Fourier sont donnés par

$$c_k(S) = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k) = \mathcal{F}^{-1}(f)(-k)$$

*Démonstration.* Par le théorème de Fubini-Tonelli, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |f(x + 2\pi l)|dx &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |f(x + 2\pi l)|dx \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} |f(y)|dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < +\infty \end{aligned}$$



En particulier,  $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |f(x + 2\pi l)| < +\infty$  p.p.t  $x \in \mathbb{R}$  donc  $S(x)$  converge absolument p.p.t  $x \in \mathbb{R}$ . De plus,

$$\int_0^{2\pi} |S(x)| dx \leq \int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |f(x + 2\pi l)| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty$$

et  $S$  étant par construction  $2\pi$ -périodique,  $S \in L^1_{per}([0, 2\pi])$ . Reste à calculer les coefficients de Fourier de  $S$ . Comme  $\int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |f(x + 2\pi l)| dx < +\infty$ , par Fubini on a pour tout entier  $k$  :

$$\begin{aligned} c_k(S) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi l) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(x + 2\pi l) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} f(y) e^{-iky} dy \text{ par } 2\pi\text{-périodicité de } x \rightarrow e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k) \end{aligned}$$

□

**Corollaire 1.1.10.** Avec les notations du théorème précédent, on a :

1.  $S = 0$  p.p. si, et seulement si, pour tout entier  $k$ ,  $\mathcal{F}^{-1}(f)(k) = 0$
2.  $S = 1$  p.p. si, et seulement si,  $\mathcal{F}^{-1}(f)(0) = 1$  et pour tout entier  $k$  non nul,  $\mathcal{F}^{-1}(f)(k) = 0$

*Démonstration.*  $S \in L^1_{per}([0, 2\pi])$  donc, d'après le lemme précédent,  $\Phi : S \rightarrow (c_k(S))_{k \in \mathbb{Z}}$  est injective. Ainsi

$$\begin{aligned} S = 0 &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, c_k(S) = \mathcal{F}^{-1}(-k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \mathcal{F}^{-1}(k) = 0 \end{aligned}$$

De plus,  $S - 1 \in L^1_{per}([0, 2\pi])$  donc, comme  $c_k(1) = \int_0^{2\pi} e^{-ikx} = \delta_{k,0}$ , on a :

$$\begin{aligned} \Phi(S - 1) &= (c_k(S - 1))_{k \in \mathbb{Z}} \\ &= (c_k(S) - c_k(1))_{k \in \mathbb{Z}} \\ &= (c_k(S) - \delta_{k,0})_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} S = 1 &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, c_k(S) - \delta_{k,0} = 0 \\ &\Leftrightarrow c_0(S) = 1 \text{ et } \forall k \neq 0 \in \mathbb{Z}, c_k(S) = 0 \end{aligned}$$

□

### 1.1.3 Théorème de Paley-Wiener

Il est souvent possible de prolonger la transformée de Fourier  $\hat{f}$  d'une fonction  $f$  intégrable en une fonction holomorphe dans un certain ouvert connexe du plan complexe. Certaines conditions sur  $f$  assurent même l'holomorphie de  $\hat{f}$  sur certains ouverts de  $\mathbb{C}$ . Nous nous contenterons ici de présenter l'une des familles de fonctions holomorphes ainsi construites, cette famille sera de surcroît holomorphe sur tout  $\mathbb{C}$ . Les résultats de cette sous-section proviennent de [3].

**Théorème 1.1.11.** *Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  est à support compact inclut dans  $[a, b]$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ , alors sa transformée de Fourier  $\hat{f}$  est bien définie sur le plan complexe. De plus on a*

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &\leq \int_a^b |f(x)| e^{x(\operatorname{Im}\xi)} dx \\ &\leq \|f\|_{L^1} \begin{cases} e^{b(\operatorname{Im}\xi)} & \text{si } \operatorname{Im}\xi \geq 0 \\ e^{a(\operatorname{Im}\xi)} & \text{si } \operatorname{Im}\xi \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si on suppose de plus que  $f$  est  $C^\infty$ , on peut appliquer le théorème 1.1.11 sur  $f^{(l)}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , ce qui permet de borner  $|\xi|^l |\hat{f}(\xi)|$ .

**Proposition 1.1.12.** *Si  $f \in C_c^\infty([a, b])$ , alors il existe une suite  $(C_N)_{N \in \mathbb{N}}$  de réels positifs telle que l'extension holomorphe de la transformée de Fourier de  $f$  vérifie pour tout  $N$ ,*

$$|\hat{f}(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N} \begin{cases} e^{b(\operatorname{Im}\xi)} & \text{si } \operatorname{Im}\xi \geq 0 \\ e^{a(\operatorname{Im}\xi)} & \text{si } \operatorname{Im}\xi \leq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Le théorème suivant, dû à Paley et Wiener, est en fait la réciproque de la propriété 1.1.12.

**Théorème 1.1.13. Paley-Wiener**

*Toute fonction entière (ie : holomorphe sur  $\mathbb{C}$ ) vérifiant (1.2) pour tout entier  $N$  est l'extension holomorphe d'une transformée de Fourier d'une fonction  $C^\infty$  à support compact inclut dans  $[a, b]$ .*

Il existe aussi une version du théorème de Paley-Wiener dans le cadre des distributions. On pourra l'énoncer après avoir défini quelques notions.

**Définition 1.1.14.** Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite à décroissance rapide si pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x^\alpha f(x)| = 0.$$

On appelle espace de Schwarz, noté  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , l'espace des fonctions  $C^\infty$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  à décroissances rapides ainsi que toutes leurs dérivées.

**Définition 1.1.15.** Une distribution tempérée est une application linéaire  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  telle que pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$  il existe  $C_{n,m} > 0$  tel que

$$|T(f)| \leq C_{n,m} \sup_{x \in \mathbb{R}} |(1 + |x|)^n f^{(m)}(x)|, \text{ pour tout } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

On appelle  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  l'espace des distributions tempérées.

*Remarque 1.1.16.* Toute fonction  $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  peut être vue comme une distribution : pour tout  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \overline{F(x)} f(x) dx$ .

Une distribution  $T$  est dite supportée par  $[a, b]$  si  $T(f) = 0$  pour toute fonction  $f$  dont le support n'intersecte pas  $[a, b]$ . On peut définir la transformée de Fourier  $\hat{T}$  d'une distribution  $T$  par

$$\hat{T}(f) = T(\hat{f}(x)).$$

**Théorème 1.1.17.** Une fonction entière  $\hat{T}(\xi)$  est l'extension analytique de la transformée de Fourier d'une distribution  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  à support compact inclut dans  $[a, b]$  si, et seulement si, pour un certain  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_N > 0$  tel que

$$|\hat{T}(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^N \begin{cases} e^{b(Im\xi)} & \text{si } Im\xi \geq 0 \\ e^{a(Im\xi)} & \text{si } Im\xi \leq 0 \end{cases}$$

## 1.2 Frames et Bases de Riesz

Nous renvoyons à [7] pour cette section.

On travaillera ici sur des espaces de Hilbert séparables  $(H, \|\cdot\|)$ .

Une frame peut être vue comme la généralisation de famille génératrice :

**Définition 1.2.1.** Une famille d'éléments  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq H$  est appelée frame de  $H$  s'il existe deux constantes  $A, B > 0$  telles que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle f, f_\lambda \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \forall f \in H \quad (1.3)$$

Tous les nombres  $A, B$  pour lesquels (1.3) existe sont appelés frontières de la frame. Ils ne sont pas uniques. Cependant, la plus grande valeur possible de  $A$  et la plus petite de  $B$  sont appelées frontières optimales de la frame. Si l'on peut choisir  $A = B$ , on aura une tight frame. Si une frame cesse d'être une frame quand on retire un élément arbitraire à la famille  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ , la frame est dite exacte.

**Définition 1.2.2.** Une famille d'éléments  $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset H$  est appelée base de Riesz de  $H$  si, et seulement si il existe  $T : H \rightarrow H$  opérateur linéaire continu, bijectif et il existe une base hilbertienne  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  de  $H$  tels que  $g_\lambda = T(e_\lambda)$ ,  $\forall \lambda \in \Lambda$ .

Nous allons maintenant étudier des caractérisations de ces bases de Riesz.

**Théorème 1.2.3.** Soit  $(H, \|\cdot\|)$  un espace de Hilbert séparable. La suite  $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  est une base de Riesz de  $H$  si, et seulement si,

- (i) les combinaisons linéaires finies de vecteurs  $g_\lambda$  sont denses dans  $H$ ,
- (ii) il existe deux constantes  $0 < A \leq B < +\infty$  telles que  $\forall \Lambda_0 \subset \Lambda$  sous-ensemble fini, et  $\forall (c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_0}$  suite finie de complexes, on a :

$$\left( A \sum_{\lambda \in \Lambda_0} |c_\lambda|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{\lambda \in \Lambda_0} c_\lambda g_\lambda \right\| \leq \left( B \sum_{\lambda \in \Lambda_0} |c_\lambda|^2 \right)^{1/2}$$

*Démonstration.* Supposons que  $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  est une base de Riesz de  $H$ . Par définition, il existe un isomorphisme  $T : H \rightarrow H$  et une base orthonormée  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de  $H$  tels que pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $g_\lambda = T(e_\lambda)$ . Pour tout  $h \in H$ , comme  $T$  est bijectif,  $T^{-1}(h) \in H$ . Puisque  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  est une base orthonormée, il existe  $(c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  tel que  $T^{-1}(h) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e_\lambda$ . On en déduit que  $T(\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda g_\lambda = h$ , par linéarité et continuité de  $T$ . Ce qui prouve (i).

Par continuité de  $T$ ,  $\exists B > 0$  tel que  $\|T(h)\| \leq \sqrt{B}\|h\|, \forall h \in H$ . Ainsi  $\forall \Lambda_0 \subset \Lambda$  fini,  $\forall (c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_0}$  complexes,

$$\left\| \sum_{\lambda \in \Lambda_0} c_\lambda g_\lambda \right\| = \left\| T\left( \sum_{\lambda \in \Lambda_0} c_\lambda e_\lambda \right) \right\| \leq \sqrt{B} \left\| \sum_{\lambda \in \Lambda_0} c_\lambda e_\lambda \right\| = \left( B \sum_{\lambda \in \Lambda_0} |c_\lambda|^2 \right)^{1/2}$$

L'opérateur  $T : H \rightarrow H$  étant linéaire, bijectif et continu, le théorème d'isomorphisme de Banach s'applique :  $T^{-1}$  est continue. On a donc l'existence d'une constante  $\frac{1}{\sqrt{A}} > 0$  telle que  $\|T^{-1}(h)\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}\|h\|, \forall h \in H$ . Ainsi  $\forall \Lambda_0 \subset \Lambda$  fini,  $\forall (c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_0}$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \left\| \sum_{\lambda \in \Lambda_0} c_\lambda g_\lambda \right\| \geq \|T^{-1}\left( \sum_{\lambda \in \Lambda_0} c_\lambda g_\lambda \right)\| = \left\| \sum_{\lambda \in \Lambda_0} c_\lambda e_\lambda \right\|.$$

Ainsi,  $\left\| \sum_{\lambda \in \Lambda_0} c_\lambda g_\lambda \right\| \geq \sqrt{A} \left( \sum_{\lambda \in \Lambda_0} |c_\lambda|^2 \right)^{1/2}$ , ce qui prouve (ii).

Réciproquement, supposons que la suite  $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  vérifie (i) et (ii). On se donne une base hilbertienne de  $H$ ,  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ . On définit un opérateur  $T$  en posant  $T(e_\lambda) = g_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$ . Soit  $a = (a_0, a_1, \dots) \in H$  à support compact (ie : il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N, a_n = 0$ ) dans la base  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ . Alors par (ii),  $\|Ta\|^2 \leq B\|a\|^2$ . Soit maintenant  $h$  un élément quelconque de  $H$ , comme  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est une base hilbertienne de  $H$ , les combinaisons linéaires finies des éléments de  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  sont denses dans  $H$ . Il existe donc une suite d'éléments  $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $H$  à support compact convergent vers  $h$ . Par (ii),  $\|T(h_p - h_q)\|^2 \leq B\|h_p - h_q\|^2$ . Or  $\|h_p - h_q\| \rightarrow 0$  car  $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy, donc  $(Th_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est également une suite de Cauchy. L'espace  $H$  étant complet, il existe  $y \in H$  tel que  $(Th_j)_{j \in \mathbb{N}}$  converge vers  $y$ . On pose  $y = Th$ . L'opérateur  $T$  est linéaire et continue :  $\|Th\| = \lim_{j \rightarrow +\infty} \|Th_j\| \leq \sqrt{B} \lim_{j \rightarrow +\infty} \|h_j\| = \sqrt{B}\|h\|$ . Reste à prouver la continuité de  $T^{-1}$ . Pour tout  $h \in H$ , par (i), pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , il existe une suite  $(c_\lambda^j)$  et un sous ensemble fini  $\Lambda_j$  de  $\lambda$  tels que  $h_j = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_\lambda^j g_\lambda$ .

On peut alors écrire

$$\|T^{-1}(h_j)\| = \left\| T^{-1}\left( \sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_\lambda^j g_\lambda \right) \right\| = \left\| \sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_\lambda^j e_\lambda \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \left\| \sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_\lambda^j g_\lambda \right\| = \frac{1}{\sqrt{A}} \|h_j\|.$$

Montrons pour finir que ceci est valable pour tout  $h \in H$ . La suite  $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$  converge donc est de Cauchy. On a  $\|T^{-1}(h_p - h_q)\|^2 \leq \frac{1}{A} \|h_p - h_q\|^2 \rightarrow 0$ . Ainsi la suite  $(T^{-1}h_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans l'espace complet  $H$ , il existe donc  $z \in H$  tel que  $T^{-1}h = z$ . On a alors que  $T^{-1}$  est linéaire et continue :

$$\|T^{-1}h\| = \lim_{j \rightarrow +\infty} \|T^{-1}h_j\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \lim_{j \rightarrow +\infty} \|h_j\| = \frac{1}{\sqrt{A}} \|h\|$$

□

En passant dans le domaine fréquentiel, on peut trouver une nouvelle caractérisation qui nous sera utile pour la suite. Avant de présenter cette caractérisation, nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires.

**Lemme 1.2.4.** Soit  $(K_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  une suite de fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^+$  appartenant à  $L^1_{per}([0, 2\pi])$  et vérifiant :

- (a) Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(\xi) d\xi = 1$ .
- (b) Il existe  $C > 0$ , tel que pour tout  $\xi \in [-\pi, \pi]$ , pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$K_N(\xi) \leq CN(1 + N^2\xi^2)^{-1},$$

Alors si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continue et  $2\pi$ -périodique, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |K_N * f(\xi) - f(\xi)| \right) = 0,$$

$$ie : \|(K_N * f) - f\|_{\infty} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

*Démonstration.* Soit  $\xi \in \mathbb{R}$ , alors on a

$$\begin{aligned} |K_N * f(\xi) - f(\xi)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_N(\eta) f(\xi - \eta) d\eta - f(\xi) \right| \\ &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_N(\eta) (f(\xi - \eta) - f(\xi)) d\eta \right|, \text{ par (a),} \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{CN}{1 + N^2\eta^2} |f(\xi - \eta) - f(\xi)| d\eta, \text{ par (b),} \\ &\leq \int_{-\pi N}^{\pi N} \frac{C}{1 + \nu^2} |f(\xi - N^{-1}\nu) - f(\xi)| d\nu, \text{ avec } N\eta = \nu, \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(\xi - N^{-1}\eta) - f(\xi)|}{1 + \eta^2} d\eta \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta_0 > 0$ , tel que  $\frac{1}{\eta_0} = \frac{\varepsilon}{8\|f\|_{\infty}}$ . On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\eta > \eta_0} \frac{|f(\xi - N^{-1}\eta) - f(\xi)|}{1 + \eta^2} d\eta &\leq 2\|f\|_{\infty} \int_{\eta > \eta_0} \frac{1}{1 + \eta^2} d\eta \\ &\leq 4\|f\|_{\infty} \int_{\eta_0}^{\infty} \eta^{-2} d\eta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Par uniforme continuité de  $f$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x, h \in \mathbb{R}$ ,  $|h| \leq \alpha$ ,

$$|f(x + h) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \left( \int_0^{\infty} (1 + \eta^2)^{-1} d\eta \right)^{-1}.$$

Soit  $N_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N_0^{-1}\eta_0 \leq \alpha$ , on a alors pour tout  $\eta \in [-\eta_0, \eta_0]$  et tout entier  $N \geq N_0$ ,  $|N^{-1}\eta| \leq \alpha$ , et donc

$$|f(\xi + N^{-1}\eta) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \left( \int_0^{\infty} (1 + \eta^2)^{-1} d\eta \right)^{-1}.$$

d'où  $\int_{|\eta| \leq \eta_0} \frac{|f(\xi + N^{-1}\eta) - f(\xi)|}{1 + \eta^2} d\eta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . On a ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(\xi - N^{-1}\eta) - f(\xi)|}{1 + \eta^2} d\eta \leq \varepsilon.$$

□

**Lemme 1.2.5.** Soit  $(K_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  une suite de  $L^1_{per}([0, 2\pi])$  vérifiant les hypothèses (a) et (b) du lemme 1.2.4. Soit de plus une fonction  $g$  de  $L^p_{per}([0, 2\pi])$ , avec  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alors  $(K_N * g)_{N \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $g$  dans  $L^p_{per}([0, 2\pi])$ . ie :  $\|(K_N * g) - g\|_{L^p_{per}([0, 2\pi])} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ .

*Démonstration.* Les fonctions continues  $2\pi$ -périodiques sont denses dans les espaces  $L^p_{per}([0, 2\pi])$ . Ainsi si  $g \in L^p_{per}([0, 2\pi])$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $f$  continue  $2\pi$ -périodique telle que  $\|g - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . De plus, d'après le lemme 1.2.4, il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $N \geq N_0$ ,

$$\|K_N * f - f\|_p \leq (2\pi)^{\frac{1}{p}} \|K_N * f - f\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après l'inégalité de Young, on a

$$\|K_N * (g - f)\|_p \leq \|K_N\|_1 \|g - f\|_p = \|g - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \|K_N * g - g\|_p &= \|(K_N * (g - f) + K_N * f) - f + f - g\|_p \\ &\leq \|K_N * (g - f)\|_p + \|K_N * f - f\|_p + \|f - g\|_p \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Lemme 1.2.6.** Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $\tilde{K}_N$  le polynôme trigonométrique défini pour tout  $\eta \in \mathbb{R}$  par

$$\tilde{K}_N(\eta) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\eta} \right|^2 \quad (1.4)$$

On a alors les propriétés suivantes :

(i) Pour tout  $\eta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$ , on a  $\tilde{K}_N(\eta) = \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(\frac{N\eta}{2})}{\sin^2(\frac{\eta}{2})}$ , et pour tout

$\eta \in 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $\tilde{K}_N(\eta) = \frac{N}{2\pi}$ .

(ii) Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{K}_N(\eta) d\eta = 1$ .

(iii) Il existe une constante  $c > 0$ , telle que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , et pour tout  $\eta \in [-\pi, \pi]$ ,

$$\tilde{K}_N(\eta) \leq CN(1 + N^2\eta^2)^{-1}.$$

*Démonstration.* Montrons (i). Pour tout  $\eta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$ ,  $e^{i\eta} \neq 1$ , ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{K}_N(\eta) &= \frac{1}{2\pi N} \frac{|1 - e^{-iN\eta}|^2}{|1 - e^{i\eta}|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(\frac{N\eta}{2})}{\sin^2(\frac{\eta}{2})} \end{aligned}$$

Si  $\eta \in 2\pi\mathbb{Z}$ , alors il est clair que  $\tilde{K}_N(\eta) = \frac{N}{2\pi}$ .

Pour (ii), remarquons que pour tout entier  $N$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{K}_N(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi N} \left\langle \sum_{j=0}^{N-1} e^{ij}, \sum_{k=0}^{N-1} e^{ik} \right\rangle = \frac{1}{2\pi N} \sum_{j=0}^{N-1} \|e^{ij}\|_2^2 = 1$$

Reste à montrer le dernier point. Soit  $\eta \in [-\pi, \pi]$  non nul. On a ainsi par (i)

$$\begin{aligned} \tilde{K}_N(\eta) &= \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(\frac{N\eta}{2})}{\sin^2(\frac{\eta}{2})} \\ &= \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(\frac{N\eta}{2})}{(\frac{N\eta}{2})^2} \frac{(\frac{\eta}{2})^2}{\sin^2(\frac{\eta}{2})} \\ &\leq \frac{C_1}{N} \frac{\sin^2(\frac{N\eta}{2})}{(\frac{N\eta}{2})^2}, \end{aligned}$$

où  $C_1 = \sup_{y \in ]0, \frac{\pi}{2}] } (\frac{y^2}{\sin^2(y)}) < +\infty$ . De plus, comme pour tout réel  $x$ ,  $|\sin x| \leq \min(1, |x|)$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(\frac{N\eta}{2})}{(\frac{N\eta}{2})^2} &\leq \frac{\min(1, 2^{-2}N^2\eta^2)}{2^{-2}\eta^2} \\ &\leq \min(2^{-2}\eta^{-2}, N^2) \\ &\leq N^2 \min((2N\eta)^{-2}, 1) \end{aligned}$$

De façon générale, pour tout réel  $x$  non nul,  $\min(1, |x|^{-1}) \leq 2(1 + |x|)^{-1}$ . En effet, si  $0 < |x| \leq 1$ ,  $1 + |x| \leq 2$  donc  $2(1 + |x|)^{-1} \geq 1 \geq \min(1, |x|^{-1})$ . Si maintenant  $|x| > 1$ , alors on a

$$\min(1, |x|^{-1}) = |x|^{-1} = \left( \frac{|x|}{2} + \frac{|x|}{2} \right)^{-1} \leq \left( \frac{1}{2} + \frac{|x|}{2} \right)^{-1} \leq 2(1 + |x|)^{-1}$$

Finalement, on obtient  $\frac{\sin^2(\frac{N\eta}{2})}{(\frac{N\eta}{2})^2} \leq 2N^2(1+2^{-2}N^2\eta^2)^{-1} \leq 8N^2(1+N^2\eta^2)^{-1}$ .  $\square$

**Proposition 1.2.7.** Soit  $h \in L^2(\mathbb{R})$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i)  $\{h(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  base de Riesz de  $\text{Vect}\{h(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$

(ii)  $\exists c, c'$  constantes,  $0 < c \leq c'$  telles que

$$c \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2 \leq c'$$

pour presque tout  $\xi \in \mathbb{R}$

*Démonstration.* Supposons (a), par le théorème 1.2.3 on a l'existence de deux constantes  $0 < A \leq B < +\infty$  telles que pour toute suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  à support compact, on ait

$$A \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \right) \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(\cdot - k) \right\|_2^2 \leq B \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \right) \quad (1.5)$$

De plus, par la formule de Plancherel, on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(\cdot - k) \right\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(\cdot - k) \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(\cdot - k))(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |A(\xi) \hat{h}(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

avec  $A(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-ik\xi}$  un polynôme trigonométrique. Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , on peut choisir la suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  telle que

$$\frac{1}{2\pi} |A(\xi)|^2 = \tilde{K}_N(\eta - \xi), \text{ pour } \eta \in \mathbb{R}.$$

Avec  $\tilde{K}_N$  comme dans (1.4). Comme  $A$  est un polynôme trigonométrique, on a par orthonormalité de  $(e^{-ik\cdot})_{k \in \mathbb{Z}}$ ,

$$\int_0^{2\pi} |A(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2. \quad (1.6)$$

On a ainsi par (1.5)

$$A \int_0^{2\pi} \tilde{K}_N(\eta - \xi) d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} \tilde{K}_N(\eta - \xi) |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \leq B \int_0^{2\pi} \tilde{K}_N(\eta - \xi) d\xi$$

et donc, par la propriété (ii),

$$A \leq \int_{\mathbb{R}} \tilde{K}_N(\eta - \xi) |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \leq B$$

Remarquons par ailleurs que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \tilde{K}_N(\eta - \xi) |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi &= \sum_{k \in \mathbb{R}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \tilde{K}_N(\eta - \xi) |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{k \in \mathbb{R}} \int_0^{2\pi} \tilde{K}_N(\eta - 2k\pi - \xi) |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2 d\xi \\ &= \int_0^{2\pi} \tilde{K}_N(\eta - \xi) \sum_{k \in \mathbb{R}} |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2 d\xi \\ &= (\tilde{K}_N * \theta)(\eta) \end{aligned}$$

où  $\theta \in L^1_{per}([0, 2\pi])$  définie pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  par  $\theta(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{R}} |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2$  et où l'on peut intervertir la somme et l'intégrale dans le calcul précédent par Fubini-Tonelli. On a ainsi que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $\eta \in \mathbb{R}$ ,

$$A \leq (\tilde{K}_N * \theta)(\eta) \leq B$$



De plus, d'après le lemme 1.2.5,  $\|(\tilde{K}_N * \theta) - \theta\|_{L^1_{per}([0,2\pi])} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi, il existe une sous-suite telle que pour tout  $\eta \in \mathbb{R}$ ,

$$(\tilde{K}_n * \theta)(\eta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta(\eta).$$

Donc, pour presque tout  $\eta \in \mathbb{R}$ , on a

$$A \leq \theta(\eta) \leq B.$$

Réciproquement, supposons (ii) vérifié. Soit  $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  une suite arbitraire de complexes à support fini. Alors comme précédemment on a

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k h(\cdot - k) \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(\xi)|^2 \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2 \right) d\xi,$$

avec  $B(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-ik\xi}$ . Par (ii), on a l'existence de deux constantes  $0 < c \leq c' < +\infty$  telles que

$$c \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2 \leq c'.$$

Et donc

$$\frac{c}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(\xi)|^2 \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2 \right) d\xi \leq \frac{c'}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(\xi)|^2 d\xi$$

Ce qui donne, par l'identité de Parseval,

$$c \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k|^2 \right) \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k h(\cdot - k) \right\|_2^2 \leq c' \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k|^2 \right).$$

Et donc  $(h(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  est bien une base de Riesz de  $V_0$ .  $\square$

Il est aussi intéressant de regarder quels sont les liens entre bases de Riesz et frames.

**Théorème 1.2.8.** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une frame de  $H$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est une base de Riesz de  $H$ .
- (ii)  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est une frame exacte de  $H$ .

### 1.3 Produits infinis

Dans cette partie on introduit des notions de convergence numériques et fonctionnelles des produits infinis. En particulier on verra un critère très utile de convergence des produits infinis dans le théorème qui clôture cette partie.

**Définition 1.3.1.** Soit  $(a_n)_n$  une suite de nombres complexes. On dit que  $\prod a_n$  converge lorsque la suite  $(P_N)_N$  définie par  $P_N = \prod_{n=1}^N a_n$  converge. Si elle existe, on appelle  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  la limite.

On dit de plus que le produit converge strictement si  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n \neq 0$ .

*Remarque 1.3.2.* Si  $\prod a_n$  converge strictement, alors  $a_n \rightarrow 1$ . En effet,

$$1 = \frac{P}{P} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P_N}{P_{N-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Mais ce n'est pas un critère suffisant comme on va le voir dans la suite.

**Définition 1.3.3.** Soit  $a_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  une suite de fonctions définies sur  $X$ . On dit que  $\prod a_n$  converge simplement lorsque pour tout  $x \in X$ , le produit infini  $\prod a_n(x)$  converge.

On dit que  $\prod a_n$  converge uniformément sur  $X$  lorsque la suite  $\sup_{x \in X} \left| \prod_{n=1}^N a_n(x) \right|$  converge.

**Lemme 1.3.4.** Soit  $(u_1, u_2, \dots, u_N)$  une suite de nombres complexes. On pose  $P_N = \prod_{n=1}^N (1 + u_n)$  et  $P_N^* = \prod_{n=1}^N (1 + |u_n|)$ . Alors on a

$$(i) \quad P_N^* \leq \exp\left(\sum_{n=1}^N |u_n|\right)$$

et

$$(ii) \quad |P_N - 1| \leq P_N^* - 1.$$

*Démonstration.* Pour démontrer (i), on commence par remarquer que pour tout  $u \geq 0$  on a  $\ln(1 + u) \leq u$ . En effet, le logarithme est concave, et  $u \mapsto u$  est une tangente de  $u \mapsto \ln(1 + u)$ . On a donc

$$\sum_{n=1}^N \ln(1 + |u_n|) \leq \sum_{n=1}^N |u_n|.$$

En prenant l'exponentielle de cette expression, on a l'identité voulue.

Pour démontrer (ii), on développe le produit :

$$\begin{aligned} |P_N - 1| &= |(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_N) - 1| \\ &= \left| 1 + \sum_j u_j + \sum_{k \neq j} u_j u_k + \dots + \prod_j u_j - 1 \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, N\} \\ \text{Card}(K)=k}} \prod_{j \in K} u_j \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, N\} \\ \text{Card}(K)=k}} \prod_{j \in K} |u_j| \\ &= P_N^* - 1. \end{aligned}$$

□

**Théorème 1.3.5.** Soit  $(u_n)_n$  une suite de fonctions  $u_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Si  $\sum u_n$  converge normalement sur  $X$ , alors  $\prod(1 + u_n)$  converge uniformément sur  $X$ , vers une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ .

De plus, pour tout  $x \in X$  on a

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \exists n, u_n(x) = -1.$$

Autrement dit,  $f$  ne s'annule en  $x$  que lorsque l'un des termes du produit s'annule en  $x$ .

*Démonstration.* On va montrer que la suite de fonctions  $P_N : X \rightarrow \mathbb{C}$  est une suite uniformément de Cauchy. Alors on pourra dire par un argument classique, qu'elle converge uniformément vers une fonction  $f$ .

Soient  $N, M$  deux entiers et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $x \in X$ .

$$\begin{aligned} |P_N(x) - P_M(x)| &\leq |P_N(x)| \cdot \left| \prod_{n=N+1}^M (1 + u_n(x)) - 1 \right| \\ &\leq |P_N(x)| \cdot \left( \prod_{n=N+1}^M (1 + |u_n(x)|) - 1 \right) \quad \text{d'après le lemme (i)} \\ &\leq |P_N(x)| \cdot \left( \exp\left( \sum_{n=N+1}^M |u_n(x)| \right) - 1 \right) \quad \text{d'après le lemme (ii)}. \end{aligned}$$

Comme la série  $\sum u_n$  converge normalement, la suite  $\sum_{n=0}^N \|u_n\|_X$  est de Cauchy. De plus,  $\exp(x) = 1 + x + o(x)$  quand  $x$  est proche de 0, donc il existe  $K \in \mathbb{N}$  tel que  $\exp\left(\sum_{n=N+1}^M \|u_n\|_X\right) - 1 \leq \varepsilon$  quels que soient  $N, M \geq K$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} |P_N(x) - P_M(x)| &\leq \sup_{x \in X} |P_N(x)| \cdot \left( \exp\left( \sum_{n=N+1}^M \sup_{x \in X} |u_n(x)| \right) - 1 \right) \\ &\leq \varepsilon \sup_{N \in \mathbb{N}, x \in X} |P_N(x)| \end{aligned}$$

Ce dernier sup est borné, car d'après (ii) on a

$$|P_N(x)| \leq 1 + \exp\left(\sum |u_n(x)|\right) \leq 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_X = M.$$

$M$  ne dépend pas de  $x$ , ni de  $N$ , ainsi on a bien

$$\forall N, M \geq K, \|P_N - P_M\|_X \leq M\varepsilon$$

et la suite est uniformément de Cauchy. Ainsi, le produit infini converge uniformément sur  $X$  vers une fonction  $f$ .

On démontre le deuxième point à l'aide d'une inégalité qu'on a vu pendant la preuve précédente. Soit  $x \in X$ . Déjà, si il existe  $n$  tel que  $u_n(x) = -1$  alors  $f(x) = 0$ , car  $f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(x)$ , et  $P_N(x) = 0$  pour tout  $N \geq n$ .

La réciproque est plus difficile. On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n(x) \neq -1$ . Alors pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $P_N(x) \neq 0$ .

On fixe  $N$  tel que  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)| \leq \frac{1}{2}$ . Alors pour tout  $M \geq N$ , on a

$$\begin{aligned} |P_N(x) - P_M(x)| &\leq P_N(x) \left( \exp\left( \sum_{n=N+1}^M |u_n(x)| \right) - 1 \right) \\ &\leq P_N(x) (e^{\frac{1}{2}} - 1). \end{aligned}$$

On en déduit que  $|P_M(x)| \geq |P_N(x)| - (e^{\frac{1}{2}} - 1)|P_N(x)| \geq |P_N(x)|(2 - e^{\frac{1}{2}})$ . On note  $\delta = (2 - e^{\frac{1}{2}})|P_N(x)|$ . On a  $\delta > 0$ , et pour tout  $M \geq N$ ,  $|P_M(x)| \geq \delta$ .  $f(x) \geq \delta$  et le deuxième point est prouvé.  $\square$

## Chapitre 2

# Analyse Multirésolution

La section Définition est inspirée de [4] et du cours de traitement du signal de M. A. Ayache, le reste de ce chapitre est issu de [3]. Les exemples proviennent de [6].

Mis à part le cas de la base de Haar développé plus loin, la recherche de bases d'ondelettes orthogonales est longtemps restée un problème. En 1985, en cherchant à prouver qu'il n'existait pas d'ondelettes à la fois orthogonales et régulières, Yves Meyer découvrit à son grand étonnement le contraire. Cependant la construction de cette nouvelle ondelette semblait presque miraculeuse et ne permettait pas de trouver d'autres bases orthogonales. Ce n'est que quelques années plus tard que Stéphane Mallat, alors âgé de 23 ans, trouva un procédé systématique de construction d'ondelettes orthogonales, appelé analyse multirésolution (AMR). Dans ce procédé l'ondelette mère  $\psi$  est engendrée par une autre fonction  $\varphi$  appelée ondelette père ou fonction échelle. Nous verrons aussi qu'au final l'ondelette père est elle-même engendrée par une autre fonction  $m_0$  appelée filtre passe-bas ou plus simplement filtre.

**Définition 2.0.6.** Une base orthonormée d'ondelettes de  $L^2(\mathbb{R})$  est une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$  possédant la structure suivante : toutes les fonctions constituant la base sont des copies translattées et/ou dilatées d'une seule fonction notée  $\psi$  et appelée l'ondelette mère. Plus précisément, une telle base est de la forme

$$\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.1)$$

D'habitude, pour tout  $j, k \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$$

## 2.1 Définition

### 2.1.1 Définition temporelle

Partons d'une fonction  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  dont les translattées

$$\varphi_{0,k} : x \rightarrow \varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}$$

forment un système orthonormé de  $L^2(\mathbb{R})$ . Appelons  $V_0$  le sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{R})$  engendré par  $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . En dilatant le système  $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , on va créer une famille de sous-espaces  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  tels que  $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}$ .

Si de plus, l'intersection de cette famille est nulle et son union est dense, nous aurons les conditions requises pour créer de nouvelles bases hilbertiennes à partir de la fonction  $\varphi$ . Cette fonction sera alors appelée fonction d'échelle, ou ondelette père.

**Définition 2.1.1.** Une AMR de  $L^2(\mathbb{R})$  est une suite  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous-espaces vectoriels fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1} \quad (2.2)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad (2.3)$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \text{ dense dans } L^2(\mathbb{R}) \quad (2.4)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1} \quad (2.5)$$

$$\exists \varphi \in V_0 \text{ tel que } \{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ forme une base orthonormée de } V_0 \quad (2.6)$$

La fonction  $\varphi$  est alors appelée ondelette père, et la suite des sous-espaces fermés  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  un filtre multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Complétons cette définition de plusieurs remarques :

*Remarque 2.1.2.* La propriété (2.5) signifie que l'espace  $V_j$ , pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , est une dilatation de l'espace de référence  $V_0$ . Plus précisément,  $\forall j \in \mathbb{Z}$ , on introduit l'opérateur de dilatation

$$\Delta_j : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & (x \rightarrow 2^{j/2} f(2^j x)) \end{cases} .$$

On a alors que  $\forall j \in \mathbb{Z}$ , l'opérateur  $\Delta_j$  est linéaire, bijectif et isométrique. Par conséquent, en appelant  $V_j$  l'image de  $V_0$  par  $\Delta_j$ , on a que l'image d'une base hilbertienne de  $V_0$  sera une base hilbertienne de  $V_j$ . Pour tout  $j, k \in \mathbb{Z}$ , on appelle  $\varphi_{j,k} : x \rightarrow 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$  l'image par  $\Delta_j$  de la fonction  $\varphi_{0,k}$ . On a donc que  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $V_j, \forall j \in \mathbb{Z}$ .

*Remarque 2.1.3.* On pourrait remplacer la condition (2.2) par  $V_0 \subset V_1$ . En effet en appliquant l'opérateur  $\Delta_j$  à cette inclusion on obtient (2.2).

*Remarque 2.1.4.* On peut remplacer la condition (2.6) par la condition suivante :

$$\exists g \in V_0 \text{ tel que } \{g(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ forme une base de Riesz de } V_0 \quad (2.7)$$

En effet nous verrons par la suite que (2.7) implique (2.6).

*Exemple 2.1.5.* Soit  $V_j$  l'ensemble des fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  constantes sur les intervalles du type  $[2^{-jk}, 2^{-j(k+1)}], k \in \mathbb{Z}$ . La suites des sous-espaces  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  forme une AMR. On peut prendre pour ondelette père la fonction  $\varphi = \chi_{[0,1]}$ , les translatés-dilatés de  $\varphi$  sont les

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2x - k) = 2^{\frac{j}{2}} \chi_{[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}]}(x).$$

On verra par la suite que cette AMR engendre la base de Haar.

Pour définir une ondelette mère à partir d'une AMR, il nous faut au préalable revenir sur la notion de sous-espace supplémentaire.

**Définition 2.1.6.** Soit  $(F_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une suite de sous-espaces fermés de  $H$  deux à deux orthogonaux. On dit que  $H$  est la somme directe orthogonale des sous-espaces  $F_j, j \in \mathbb{Z}$ , notée par

$$H = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}}^{\perp} F_j$$

si, et seulement si, pour tout  $y \in H$ , il existe une suite  $(x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \prod_{j \in \mathbb{Z}} F_j$  telle que  $y = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j$ .

Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on note  $W_j$  le sous-espace vectoriel fermé de  $V_{j+1}$  tel que  $V_{j+1} = V_j \bigoplus^{\perp} W_j$ . On a alors immédiatement :

pour tout  $N \geq 1, V_N = V_0 \bigoplus^{\perp} \left( \bigoplus_{0 \leq j \leq N-1} W_j \right)$ . Par (2.4), on obtient

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \bigoplus^{\perp} \left( \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} W_j \right) \quad (2.8)$$

Plus généralement, pour tout  $J \in \mathbb{Z}$ , on a

$$L^2(\mathbb{R}) = V_J \bigoplus^{\perp} \left( \bigoplus_{J \leq j < +\infty} W_j \right) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}}^{\perp} W_j$$

Reprenons à partir de (2.8) et appelons  $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  une base hilbertienne du sous-espace  $W_j$ , pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ . On a alors une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$  :

$$\{(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}, (\psi_{j,k})_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}}\}$$

Ce qui nous amène à la définition suivante :

**Définition 2.1.7.** On appelle développement multirésolution d'une fonction  $f$  de  $L^2(\mathbb{R})$  sa décomposition dans la base hilbertienne  $\{(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}, (\psi_{j,k})_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}}\}$ . On a

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi_{0,k} + \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k} \quad (2.9)$$

avec  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < +\infty, \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\beta_{j,k}|^2 < +\infty$

Si la fonction  $\psi$  est choisie de telle sorte que, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , ses translatées-dilatées  $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forment une base de  $W_j$ , alors  $\psi$  est en fait une ondelette mère. La relation (2.9) est alors appelée développement de  $f$  en ondelettes.

*Remarque 2.1.8.* La fonction  $\psi$  est une ondelette mère si  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $W_0$ . En effet,  $V_j = \Delta_j(V_0)$  et puisque  $\Delta_j$  est isométrique, il conserve donc le produit scalaire. Ainsi  $W_j = \Delta_j(W_0), \forall j \in \mathbb{Z}$ .

*Remarque 2.1.9.* Dans le développement multirésolution (2.9), chaque  $j$  correspond à un niveau de résolution, ou niveau de détail. L'expression 'niveau de résolution  $j$ ', fait à l'espace  $W_j$  et plus spécifiquement à la base  $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  de cet espace et aux coefficients  $(\beta_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ .

*Remarque 2.1.10.* Les coefficients  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $(\beta_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  de (2.9), sont obtenus par projection de la fonction  $f$  étudiée sur les sous espaces  $V_0$  et  $W_j$ .

$$\alpha_k = \langle f, \varphi_{0,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi_{0,k}(x)} dx$$

$$\beta_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{j,k}(x)} dx$$

La projection de  $f$  sur le supplémentaire orthogonale de  $V_0$  est appelée partie homogène du développement de  $f$ . Elle s'obtient par  $f - p_{V_0}(f) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}$ .

## 2.1.2 Traduction fréquentielle

Il est souvent plus facile de dire si  $\varphi$  et  $\psi$  vérifient les conditions requises pour être des ondelettes pères et mères en étudiant leurs transformées de Fourier.

Commençons par traduire (2.7), ce qui nous donnera une nouvelle caractérisation de  $V_0$ .

**Proposition 2.1.11.** *Le sous-espace  $V_0$  de  $L^2(\mathbb{R})$  engendré par  $\{g(\cdot - k)_{k \in \mathbb{Z}}\}$  est composé des fonctions  $f$  dont la transformée de Fourier peut s'exprimer, pour presque tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , comme*

$$\hat{f}(\xi) = m(\xi) \cdot \hat{g}(\xi), \quad m \in L^2_{per}([0, 2\pi])$$

*Démonstration.* Par définition de  $V_0$ , tout  $f \in V_0$  peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \cdot g(x - k)$$

où la série converge dans  $L^2(\mathbb{R})$  et où  $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ , en effet on a une base de Riesz. On en déduit que pour presque tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \cdot e^{-ik\xi} \cdot \hat{g}(\xi)$ ,

où la série converge dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Montrons pour finir que pour presque tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-ik\xi} \hat{g}(\xi) = m(\xi) \hat{g}(\xi)$ . Avec  $m(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-ik\xi}$  convergeant dans  $L^2_{per}([0, 2\pi])$  car les  $b_k$  sont dans  $l^2(\mathbb{Z})$ . En utilisant la  $2\pi$ -périodicité de la fonction  $\xi \mapsto |m(\xi) - \sum_{k=-N}^N b_k e^{-ik\xi}|^2$  et le (ii) de la propriété 1.2.7, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |m(\xi) - \sum_{k=-N}^N b_k e^{-ik\xi}|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi &= \int_0^{2\pi} |m(\xi) - \sum_{k=-N}^N b_k e^{-ik\xi}|^2 \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2l\pi)|^2 \right) d\xi \\ &\leq c' \int_0^{2\pi} |m(\xi) - \sum_{k=-N}^N b_k e^{-ik\xi}|^2 d\xi \\ &\leq c' \sum_{|k| \geq N+1} |b_k|^2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

□

Poursuivons par une caractérisation des systèmes orthonormés de  $L^2(\mathbb{R})$ .



**Proposition 2.1.12.** Soit  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ . Alors  $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forme un système orthonormé de  $L^2(\mathbb{R})$  si, et seulement si,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \quad (2.10)$$

*Démonstration.* On pose  $q = \varphi * \tilde{\varphi}$ , avec  $\tilde{\varphi}(x) = \overline{\varphi(-x)}$ . Par hypothèse,  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ , donc  $\tilde{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ , ainsi le produit de convolution de  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  est défini pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ . De plus on a  $\varphi * \tilde{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{R})$  et est uniformément continue, ce qui nous donne  $q$  intégrable.  $\mathcal{F}(q)$  est donc bien défini, et comme  $\mathcal{F}(\tilde{\varphi})(\xi) = \overline{\mathcal{F}(\varphi)(\xi)} = \overline{\hat{\varphi}(\xi)}$ , on a  $\hat{q}(\xi) = \mathcal{F}(\varphi * \tilde{\varphi})(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \cdot \overline{\hat{\varphi}(\xi)} = |\hat{\varphi}(\xi)|^2$ . D'où

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{q}(\xi + 2k\pi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2$$

Ainsi  $\hat{q} \in L^1(\mathbb{R})$ . Nous pouvons donc appliquer la formule sommatoire de Poisson :  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{q}(\xi + 2k\pi)$  converge pour presque tout  $\xi \in \mathbb{R}$  vers une fonction  $S \in L^1_{per}([0, 2\pi])$ . De plus les coefficients de Fourier de  $S$  sont les  $c_k(S) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{q})(-k) = q(-k)$ . Par ailleurs, par définition,  $q(k) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(k-t)\varphi(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\overline{\varphi(t-k)}dt$ . Nous pouvons désormais retourner au problème :

$$\begin{aligned} (\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}} \text{ système orthonormé de } L^2(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \forall k, l \in \mathbb{Z} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{0,k}(t)\overline{\varphi_{0,l}(t)}dt = \delta_{k,l} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \int_{\mathbb{R}} \varphi_{0,0}(t)\overline{\varphi_{0,k}(t)}dt = \delta_{0,k} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\overline{\varphi(t-k)}dt = \delta_{0,k} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, c_k(S) = \delta_{0,k} \end{aligned}$$

Nous savons de plus que la fonction

$$\begin{aligned} \phi : L^1_{per}([0, 2\pi]) &\rightarrow l^\infty(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto c_k(f) \end{aligned}$$

est injective. Autrement dit, deux fonctions de  $L^1_{per}([0, 2\pi])$  ayant mêmes coefficients de Fourier sont identiques. Ainsi

$$\begin{aligned} (\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}} \text{ système orthonormé de } L^2(\mathbb{R}) \\ \Leftrightarrow S(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{q}(\xi + 2k\pi) = 1 \text{ p.p.t } \xi \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \text{ p.p.t } \xi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

On peut désormais passer de la condition (2.7) à la condition (2.6).

**Proposition 2.1.13.** Soit  $g \in V_0$  telle que  $\{g(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base de Riesz de  $V_0$ . Alors la fonction  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  définie pour presque tout  $\xi \in \mathbb{R}$  par

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2\right)^{1/2}} \quad (2.11)$$

est une base hilbertienne de  $V_0$ . Plus généralement, pour  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base hilbertienne de  $V_j$ .

*Démonstration.* On a par construction  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$ . On conclut à l'aide de la proposition précédente.  $\square$

Poursuivons par une caractérisation de (2.2).

**Proposition 2.1.14.** Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $V_j \subset V_{j+1}$  si, et seulement si, il existe une fonction  $m_0 \in L^2_{per}([0, 2\pi])$  appelée filtre (ou parfois filtre passe-bas) telle que

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (2.12)$$

*Remarque 2.1.15.* Avant de démontrer la propriété, remarquons qu'étudier la croissance de la suite  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  revient à étudier la croissance de la suite  $(\widehat{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , avec  $\widehat{V}_j = \{\hat{f}, f \in V_j\}$  l'ensemble des transformées de Fourier de  $V_j$ . En effet si, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $g \in \widehat{V}_j \Rightarrow g \in \widehat{V}_{j+1}$ , il existe un  $f \in V_j$  tel que  $g = \hat{f}$  par définition de  $\widehat{V}_j$ . Cet élément  $f$  est unique par injectivité de la transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$ , et ainsi c'est ce même  $f$  qui appartient à  $V_{j+1}$ , ce qui prouve la croissance de  $(\widehat{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ .

On rappelle que comme  $(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $V_j$ , on a pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $V_j = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \varphi(2^j x - k), \sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k|^2 < +\infty \right\}$ . Ceci nous permet de décrire les sous-espaces  $\widehat{V}_j$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{V}_j &= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \mathcal{F}(\varphi(2^j x - k))(\xi); \sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k|^2 < +\infty \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{b_k}{2^j} \mathcal{F}(\varphi(x - k))\left(\frac{\xi}{2^j}\right); \sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k|^2 < +\infty \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{b_k e^{-ik\xi/2^j}}{2^j} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right); \sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k|^2 < +\infty \right\} \\ &= \left\{ \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi/2^j}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right); \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty \right\} \\ &= \left\{ m\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right); m \in L^2_{per}([0, 2\pi]) \right\} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Supposons que  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est croissante. Alors  $V_0 \subset V_1$ , donc  $\widehat{V}_0 \subset \widehat{V}_1$ . Comme  $\hat{\varphi} \in \widehat{V}_0$ , on a  $\hat{\varphi} \in \widehat{V}_1$ . D'après la remarque précédente, il existe une fonction  $m_0 \in L^2_{per}([0, 2\pi])$  telle que  $\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$ , d'où le résultat.

Réciproquement, supposons qu'il existe  $m_0 \in L^2_{per}([0, 2\pi])$  tel que  $\hat{\varphi}(\xi) = m_0(\frac{\xi}{2})\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2})$ . Soit  $f \in V_0$ , d'après la remarque il existe une fonction  $m \in L^2_{per}([0, 2\pi])$  telle que  $\hat{f}(\xi) = m(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$  p.p.t  $\xi \in \mathbb{R}$ . En utilisant l'hypothèse, on a  $\hat{f}(\xi) = m(\xi)m_0(\frac{\xi}{2})\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2})$ . La fonction  $g$  définie par  $g : \xi \rightarrow m(2\xi)m_0(\xi)$  est clairement  $2\pi$  périodique. Puisque  $m_0$  bornée, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|g\|_2^2 &= \int_0^{2\pi} |m(2t)m_0(t)|^2 dt \\ &\leq \|m_0\|_\infty \int_0^{2\pi} |m(t)|^2 dt \\ &\leq \|m_0\|_\infty \|m\|_2^2 \leq +\infty \end{aligned}$$

On a donc bien  $\hat{f} \in V_1$ , d'où  $f \in V_1$ . Par conséquent  $V_0 \subset V_1$ , ce qui suffit d'après la remarque 2.1.2.  $\square$

Le lemme suivant nous apporte des informations supplémentaires sur la condition (2.12), et donc sur (2.2).

**Lemme 2.1.16.** *Soit  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  tel que  $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  système orthonormé de  $L^2(\mathbb{R})$ , alors toute fonction  $m_0$  de  $L^2_{per}([0, 2\pi])$  satisfaisant la condition (2.12) vérifie de plus*

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \text{ p.p.t } \xi \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

*Démonstration.* Comme  $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est un système orthonormé, d'après la condition (2.10), on a  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 = 1$ , pour presque tout  $\xi \in \mathbb{R}$ . En utilisant (2.12) on a :  $1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\xi + k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + k\pi)|^2$ . On va désormais sommer séparément les pairs et les impairs. Puis on utilisera la  $2\pi$ -périodicité de la fonction  $m_0$  :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\xi + 2k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\xi + (2l+1)\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + (2l+1)\pi)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\xi + \pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + \pi + 2l\pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}((\xi + \pi) + 2l\pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \end{aligned}$$

Puisque  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}((\xi + \pi) + 2l\pi)|^2 = 1$ .  $\square$

*Remarque 2.1.17.* On s'intéressera dans la suite beaucoup à cette condition (2.13). Notons dès maintenant que ce n'est qu'une condition nécessaire de (2.12) et donc de l'orthonormalité des  $(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}, \forall j \in \mathbb{Z}$ . On verra plus tard que ce n'est pas une condition suffisante.

On a réussi à réduire les condition (2.2), (2.6) et (2.7) à des vérifications calculatoires de transformées de Fourier. Intéressons nous maintenant à la construction d'une ondelette mère  $\psi$  à partir de  $\varphi$ , c'est à dire une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  telle que  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base hilbertienne de  $V_0$ .

**Proposition 2.1.18.** Soit  $\varphi$  une ondelette père et soit  $m_0 \in L^2_{per}([0, 2\pi])$  vérifiant (2.12). Alors, en posant

$$m_1(\xi) = \overline{m_0(\xi + \pi)} e^{-i\xi},$$

et

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad (2.14)$$

on obtient que  $\psi$  est une ondelette mère.

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forme un système orthonormé de  $L^2(\mathbb{R})$ , autrement dit, par (2.10), que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$ , p.p.t  $\xi$ .

Utilisons les hypothèses pour réécrire le membre de gauche :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_1\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)|^2 |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0\left(\frac{\xi}{2} + (k+1)\pi\right)|^2 |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)|^2 \end{aligned}$$

On va maintenant sommer séparément les indices pairs et impairs, puis utiliser la  $2\pi$ -périodicité de  $m_0$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} |m_0\left(\frac{\xi}{2} + (2p+1)\pi\right)|^2 |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2p\pi\right)|^2 + \\ &\quad \sum_{q \in \mathbb{Z}} |m_0\left(\frac{\xi}{2} + (2q+2)\pi\right)|^2 |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + (2q+1)\pi\right)|^2 \\ &= |m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)|^2 \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2p\pi\right)|^2 + \\ &\quad |m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)|^2 \sum_{q \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + (2q+1)\pi\right)|^2 \\ &= |m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)|^2 + |m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité a lieu presque partout par (2.10) : pour presque tout  $\xi$ ,

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2p\pi\right)|^2 = \sum_{q \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + (2q+1)\pi\right)|^2 = 1.$$

La dernière égalité est une application de (2.13) du lemme précédent. Ce qui prouve  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  système orthonormé de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Montrons ensuite que les  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  sont dans  $W_0$ . Comme  $m_0 \in L^2_{per}([0, 2\pi])$ , il est immédiat que  $m_1 \in L^2_{per}([0, 2\pi])$ . Donc, par définition,

$$\hat{\psi} \in \hat{V}_1 = \{m\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right), m \in L^2_{per}([0, 2\pi])\}.$$

Ainsi  $\psi \in V_1$ . De plus, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\widehat{\psi_{0,k}}(\xi) = e^{-ik\xi} \hat{\psi}(\xi) = e^{-ik\xi} m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

avec  $\xi \rightarrow e^{-ik2\xi} m_1(\xi)$  une fonction de  $L_{per}^2([0, 2\pi])$ . Donc pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\psi_{0,k} \in V_1$ . Montrons que les  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  sont orthogonales à  $V_0$ . La famille  $(\varphi_{0,l})_{l \in \mathbb{Z}}$  étant une base hilbertienne de  $V_0$ , il suffit de voir que les  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  sont orthogonales aux  $(\varphi_{0,l})_{l \in \mathbb{Z}}$ . Pour ce faire, utilisons, comme dans la démonstration de (2.1.12), la formule sommatoire de Poisson. Soit  $g = \varphi * \tilde{\psi}$  où  $\tilde{\psi}(x) = \overline{\psi(-x)}$ . Alors  $\hat{g} = \hat{\varphi} \hat{\tilde{\psi}} = \hat{\varphi} \overline{\hat{\psi}}$ . Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  appartenant à  $L^2(\mathbb{R})$ , on a par Cauchy-Schwarz

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)| |\overline{\hat{\psi}(\xi)}| d\xi \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi} < +\infty.$$

Donc  $\hat{g}$  intégrable et, d'après la formule sommatoire de Poisson,  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(\xi + 2k\pi)$  converge presque pour tout  $\xi$  vers une fonction  $S \in L_{per}^1([0, 2\pi])$  de coefficients de Fourier  $c_k(S) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{g})(-k) = g(-k)$ . On peut maintenant écrire

$$\begin{aligned} & (\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}} \text{ orthogonale à } (\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}} \\ \iff & \forall k, l \in \mathbb{Z}, \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-l) \overline{\psi(x-k)} dx = 0 \\ \iff & \forall k \in \mathbb{Z}, \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\psi(x-k)} dx = 0 \\ \iff & \forall k \in \mathbb{Z}, \varphi * \tilde{\psi}(k) = 0 \\ \iff & \forall k \in \mathbb{Z}, \mathcal{F}^{-1}(\hat{g})(-k) = 0 \\ \iff & \forall k \in \mathbb{Z}, c_k(S) = 0 \\ \iff & S(\xi) = 0, \text{ p.p.t } \xi \in \mathbb{R} \\ \iff & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(\xi + 2k\pi) = 0 \text{ p.p.t } \xi \in \mathbb{R} \\ \iff & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\xi + 2k\pi) \overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)} = 0 \text{ p.p.t } \xi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où l'on a  $(c_k(S) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}) \iff (S(\xi) = 0 \text{ p.p.t } \xi \in \mathbb{R}, S \in L_{per}^1([0, 2\pi]))$ , par injectivité de

$$\phi : \begin{cases} L_{per}^1([0, 2\pi]) & \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \rightarrow c_k(f) \end{cases}$$

Si l'on pose  $A = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\xi + 2k\pi) \overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)}$ , on a

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)} \text{ par (2.12)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) m_1\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)} |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)|^2 \end{aligned}$$

On somme de nouveau les indices pairs et impairs séparément et on utilise la

$2\pi$ -périodicité de  $m_0$  et  $m_1$

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} m_0\left(\frac{\xi}{2} + 2p\pi\right) \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2} + 2p\pi\right)} |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2p\pi\right)|^2 + \\
&\quad \sum_{q \in \mathbb{Z}} m_0\left(\frac{\xi}{2} + (2q+1)\pi\right) \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2} + (2q+1)\pi\right)} |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + (2q+1)\pi\right)|^2 \\
&= m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)} \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2p\pi\right)|^2 + m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \sum_{q \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + (2q+1)\pi\right)|^2 \\
&= m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)} + m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \text{ p.p.t } \xi \in \mathbb{R} \\
&= m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) e^{i\frac{\xi}{2}} + m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) m_0\left(\frac{\xi}{2} + 2\pi\right) e^{i\frac{\xi}{2}} e^{i\pi} \text{ p.p.t } \xi \in \mathbb{R} \\
&= m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) e^{i\frac{\xi}{2}} - m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) e^{i\frac{\xi}{2}} \text{ p.p.t } \xi \in \mathbb{R} \\
&= 0 \text{ p.p.t } \xi \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que les  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  sont orthogonales aux  $(\varphi_{0,l})_{l \in \mathbb{Z}}$ .

Reste enfin à prouver que les  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forment une base hilbertienne de  $W_0$ . Autrement dit que pour tout  $f \in W_0$ , il existe une suite  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \ell^2(\mathbb{R})$  telle que  $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi(x - k)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Cette condition est équivalente à l'existence

d'une fonction  $\nu \in L^2_{per}([0, 2\pi])$  telle que pour presque tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{f}(\xi) = \nu(\xi) \hat{\psi}(\xi)$ . En effet,  $W_0 = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi(x - k), \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty \right\}$  et donc  $\widehat{W}_0 = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi} \hat{\psi}(\xi), \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty \right\} = \left\{ \nu(\xi) \hat{\psi}(\xi), \nu \in L^2_{per}([0, 2\pi]) \right\}$ . Soit  $f \in W_0$ .

Comme  $f \in V_1$ , on peut traduire cette appartenance à l'aide de conditions sur la transformée de Fourier : il existe  $m \in L^2_{per}([0, 2\pi])$  tel que  $\hat{f}(\xi) = m\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$  p.p.t  $\xi \in \mathbb{R}$ . Posons maintenant  $h = \varphi * \tilde{f}$ , alors  $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$  et l'on peut lui appliquer la formule sommatoire de Poisson et le même raisonnement que celui appliqué plus haut sur les  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ . On obtient la condition suivante :

$$f \text{ orthogonale à } V_0 \iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\xi + 2k\pi) \overline{\hat{f}(\xi + 2k\pi)} = 0 \text{ p.p.t } \xi \in \mathbb{R}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\xi + 2k\pi) \overline{\hat{f}(\xi + 2k\pi)} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \overline{\hat{f}(\xi + 2k\pi)} \text{ par (2.12)} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) m\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \overline{m\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)} |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)|^2 \\
&= m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{m\left(\frac{\xi}{2}\right)} \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2p\pi\right)|^2 + m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \overline{m\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \sum_{q \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + (2q+1)\pi\right)|^2 \\
&= m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{m\left(\frac{\xi}{2}\right)} + m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \overline{m\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \text{ p.p.t } \xi \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

On pose  $\zeta = \frac{\xi}{2}$  et, en passant aux conjugués, on a donc la condition suivante

$$m(\zeta) \overline{m_0(\zeta)} + m(\zeta + \pi) \overline{m_0(\zeta + \pi)} = 0 \text{ p.p.t } \zeta \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

Or,  $\varphi$  étant une ondelette père,  $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forme un système orthonormé et la condition (2.2) est vérifiée. Autrement dit, le lemme donnant la condition (2.13) s'applique :  $m_0(\zeta)$  et  $m_0(\zeta + \pi)$  ne peuvent être nuls simultanément. Remarquons que si  $m_0(\zeta) = 0$ , alors  $\frac{m(\zeta)}{m_0(\zeta + \pi)} \cdot \overline{m_0(\zeta + \pi)} = m(\zeta)$ . Si maintenant  $m_0(\zeta) \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
-\frac{m(\zeta + \pi)}{m_0(\zeta)} \overline{m_0(\zeta + \pi)} &= -\frac{m(\zeta + \pi) \overline{m_0(\zeta + \pi)}}{m_0(\zeta)} \\
&= \frac{m(\zeta) \overline{m_0(\zeta)}}{m_0(\zeta)} \text{ par (2.15)} \\
&= m(\zeta)
\end{aligned}$$

Ce qui nous amène à poser

$$\lambda(\zeta) = \begin{cases} -\frac{m(\zeta + \pi)}{m_0(\zeta)} & \text{si } m_0(\zeta) \neq 0 \\ \frac{m(\zeta)}{m_0(\zeta + \pi)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc  $m(\zeta) = \lambda(\zeta) \overline{m_0(\zeta + \pi)}$  p.p.t  $\zeta \in \mathbb{R}$ . Puisque les fonctions  $m$  et  $m_0$  sont  $2\pi$ -périodiques,  $\lambda$  l'est aussi, et en distinguant les différent cas on obtient  $\lambda(\zeta) + \lambda(\zeta + \pi) = 0$  p.p.t  $\zeta \in \mathbb{R}$ . En multipliant par  $e^{i\zeta}$ , on a  $e^{i\zeta} \lambda(\zeta) - e^{i\pi} e^{i\zeta} \lambda(\zeta + \pi) = 0$  p.p.t  $\zeta \in \mathbb{R}$ . D'où  $e^{i\frac{\xi}{2}} \lambda\left(\frac{\xi}{2}\right) = e^{i\frac{\xi+2\pi}{2}} \lambda\left(\frac{\xi+2\pi}{2}\right) = 0$  p.p.t  $\xi \in \mathbb{R}$ . Soit  $\nu(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}} \lambda\left(\frac{\xi}{2}\right)$ , la dernière relation montre bien que  $\nu$  est  $2\pi$ -périodique. Reprenons à

partir de la condition d'appartenance de  $f$  à  $V_1$  :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= m\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= \lambda\left(\frac{\xi}{2}\right)\overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)} \\
&= \nu(\xi)e^{-i\frac{\xi}{2}}\overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)} \\
&= \nu(\xi)\hat{\psi}(\xi)
\end{aligned}$$

Reste à prouver que  $\nu \in L^2_{per}([0, 2\pi])$ . On sait déjà que  $m \in L^2_{per}([0, 2\pi])$ , donc  $\int_0^{2\pi} |m(\zeta)|^2 d\zeta < +\infty$ . En intégrant de 0 à  $\pi$  et de  $\pi$  à  $2\pi$ , puis en effectuant un changement de variable dans la seconde intégrale, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |m(\zeta)|^2 d\zeta &= \int_0^\pi |\lambda(\zeta)|^2 |m_0(\zeta + \pi)|^2 d\zeta + \int_\pi^{2\pi} |\lambda(\zeta)|^2 |m_0(\zeta + \pi)|^2 d\zeta \\
&= \int_0^\pi (|\lambda(\zeta)|^2 |m_0(\zeta + \pi)|^2 + |\lambda(\zeta + \pi)|^2 |m_0(\zeta)|^2) d\zeta \\
&= \int_0^\pi |\lambda(\zeta)|^2 (|m_0(\zeta + \pi)|^2 + |m_0(\zeta)|^2) d\zeta \text{ car } |\lambda(\zeta)|^2 = |\lambda(\zeta + \pi)|^2 \\
&= \int_0^\pi |\lambda(\zeta)|^2 d\zeta \text{ p.p.t } \zeta \in \mathbb{R} \\
&= 2 \int_0^{2\pi} |\lambda\left(\frac{\xi}{2}\right)|^2 d\xi \text{ p.p.t } \zeta \in \mathbb{R} \\
&= 2 \int_0^{2\pi} |\nu\left(\frac{\xi}{2}\right)|^2 d\xi \text{ p.p.t } \zeta \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

On a ainsi  $\int_0^{2\pi} |\nu\left(\frac{\xi}{2}\right)|^2 d\xi < +\infty$  donc  $\nu \in L^2_{per}([0, 2\pi])$  et  $\hat{f}(\xi) = \nu(\xi)\hat{\psi}(\xi)$  p.p.t  $\xi \in \mathbb{R}$ . Ainsi  $f \in W_0$  et  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est bien une base hilbertienne de  $W_0$ .  $\square$

*Remarque 2.1.19.* La fin de la preuve montre que la transformée de Fourier d'une fonction  $f \in W_0$  est de la forme  $\hat{f}(\xi) = \nu(\xi)e^{-i\frac{\xi}{2}}\overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)}$ ,  $\nu \in L^2_{per}([0, 2\pi])$ . Ce qui justifie le choix de  $\psi$  dans la proposition.

### 2.1.3 Retour au domaine temporel

Nous allons ici observer qu'il existe des liens forts entre les coefficients du filtre  $m_0$  et de l'ondelette père  $\varphi$ , ainsi qu'entre  $\varphi$  et  $\psi$  décomposées dans la base hilbertienne de  $V_1$ ,  $(\varphi_{1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ . Intéressons-nous premièrement à  $\varphi$ . Puisque  $\varphi \in V_0 \subset V_1$ , et que la famille  $(\varphi_{1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $V_1$ , on peut écrire

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{1,k}, \text{ avec } h_k = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle.$$

Remarquons que, par orthonormalité de la famille  $(\varphi_{1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ , on a

$$\|\varphi\|_2 = 1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2. \quad (2.16)$$



Finalement on a

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k). \quad (2.17)$$

On va déduire les coefficients du filtre à partir de la transformée de Fourier de cette équation.

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\frac{\xi}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

où les séries ci-dessus convergent au sens  $L^2$ . De la relation (2.12) vrai presque partout, on déduit de l'égalité précédente que

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi}, \text{ avec } \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 < +\infty. \quad (2.18)$$

Ainsi on observe que les coordonnées  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $\varphi$  dans la base hilbertienne  $(\varphi_{1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $V_1$  sont aussi les coordonnées de  $m_0$  dans la base hilbertienne  $(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ik\cdot})_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2_{per}([0, 2\pi])$ .

Poursuivons par une propriété de la suite  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  due à (2.13).

**Proposition 2.1.20.** *Soit  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  la suite des coefficients de Fourier de  $m_0$  dans  $L^2_{per}([0, 2\pi])$ , avec  $m_0$  défini comme (2.12) et avec  $\varphi$  une ondelette ondelette père. Supposons de plus qu'il n'y a qu'un nombre fini de  $h_k$ . Alors*

$$\forall l \in \mathbb{Z}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_{k+2l}} = \delta_{0,l} \quad (2.19)$$

En particulier,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 = 1. \quad (2.20)$$

*Démonstration.* Toute les hypothèses pour appliquer (2.13) sont vérifiées, on a donc p.p.t  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} 1 &= |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \\ &= m_0(\xi) \overline{m_0(\xi)} + m_0(\xi + \pi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi} \right) \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{h_j} e^{ij\xi} \right) + \frac{1}{2} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik(\xi + \pi)} \right) \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{h_j} e^{ij(\xi + \pi)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,j \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_j} e^{i(j-k)\xi} + \frac{1}{2} \sum_{k,j \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_j} e^{i(j-k)\xi + i(j-k)\pi} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,j \in \mathbb{Z}} (h_k \overline{h_j} e^{i(j-k)\xi} (1 + e^{i(j-k)\pi})) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_{k+2l}} e^{il\xi} (1 + e^{i2l\pi}), \text{ avec } l = j - k \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_{k+2l}} \right) e^{2il\xi}, \text{ on somme sur les } l \text{ pairs car pour } l \text{ impair, } 1 + e^{i2l\pi} = 0 \end{aligned}$$

Les produits  $(\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi}) (\sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{h_j} e^{ij\xi})$  sont bien définis il n'y a qu'un nombre fini de  $h_k$ . Par conséquent, pour tout  $l \in \mathbb{Z}$ ,  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_{k+2l}} = \delta_{0,l}$ .  $\square$

Terminons par le lien étroit entre les coordonnées de l'ondelette père  $\varphi$  et celles de l'ondelette mère  $\psi$  dans la base hilbertienne  $(\varphi_{1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $V_1$ .

Par définition de  $\psi$ , on a

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(\xi) &= \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} e^{-i\frac{\xi}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_k} e^{ik\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) - i\frac{\xi}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_k} (-1)^k e^{i(k-1)\frac{\xi}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{h_{1-l}} (-1)^{1-l} e^{-il\frac{\xi}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \text{ avec } l = 1 - k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{h_{1-l}} (-1)^{l+1} e^{-il\frac{\xi}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \text{ car } 1-l \text{ et } 1+l \text{ ont même parité.} \\
&= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k \mathcal{F}(\varphi(2x - k))(\xi), \text{ avec } \lambda_k = (-1)^{k+1} \overline{h_{1-k}}
\end{aligned}$$

Donc, par transformée de Fourier inverse,

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k \varphi_{1,k}(x), \text{ avec } \lambda_k = (-1)^{k+1} \overline{h_{1-k}} \quad (2.21)$$

*Exemple 2.1.21.* Revenons au système de Haar. On avait pour tout  $j, k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2x - k) = 2^{\frac{j}{2}} \chi_{[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}]}(x).$$

On peut donc écrire  $\varphi = \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}$ , ce qui nous donne  $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $h_k = 0$  sinon. On peut directement déduire l'ondelette mère  $\psi$  des ces coefficients :  $\psi(x) = \lambda_0 \varphi_{1,0}(x) + \lambda_1 \varphi_{1,1}(x)$ , avec  $\lambda_0 = -h_1$  et  $\lambda_1 = h_0$ . D'où

$$\psi = -\varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}.$$

On aurait aussi pu retrouver  $\psi$  à partir du filtre de  $\varphi$ . On part toujours de  $\varphi = \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}$ . Les coefficients du filtre étant directement issus de ceux de l'ondelette père, on obtient  $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_0 + h_1 e^{-i\xi}) = \frac{1+e^{-i\xi}}{2}$ . On calcul ensuite la transformée de Fourier de  $\varphi$  :  $\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx = \frac{1-e^{-i\xi}}{i\xi} = e^{-i\frac{\xi}{2}} \frac{\sin(\frac{\xi}{2})}{\frac{\xi}{2}}$ . De (2.14), il vient  $\hat{\psi}(2\xi) = m_1(\xi) \hat{\varphi}(\xi) = \overline{m_0(\xi + \pi)} \hat{\varphi}(\xi)$ . Un rapide calcul nous donne  $m_1(\xi) = \frac{1-e^{i\xi}}{2} e^{-i\xi} = -ie^{-i\frac{\xi}{2}} \sin(\frac{\xi}{2})$ . Et donc

$$\hat{\psi}(\xi) = -ie^{-i\frac{\xi}{2}} \frac{\sin^2(\frac{\xi}{4})}{\frac{\xi}{4}}.$$

On montre enfin facilement que la transformée de Fourier de  $-\varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}$  est égale à  $\hat{\psi}$ .

## 2.2 Construction d'une Analyse Multirésolution à partir de l'ondelette père $\varphi$

Par définition, une AMR consiste en une suite de sous-espaces  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  et d'une fonction  $\varphi$  telle que les conditions (2.2) à (2.6) soient vérifiées. Il est légitime de se demander s'il est possible de construire une AMR en partant seulement d'une ondelette père bien appropriée qui engendrerait la suite des sous-espaces. En effet, par la remarque 2.1.2, il suffit, pour construire les sous-espaces  $V_j$ , de connaître le sous-espace  $V_0$ , de plus la famille  $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}} = (\varphi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base de ce sous-espace. Par ailleurs, d'après la propriété 2.1.13, une base de Riesz de  $V_0$  permet facilement de trouver une base hilbertienne de cet espace et est donc suffisante pour construire la suite de sous-espaces  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ . On part donc d'une base de Riesz de  $V_0$  vérifiant de plus la condition (2.5) : on choisit une fonction  $g \in L^2(\mathbb{R})$  telle que :

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k g(2x - k), \text{ où } \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty \quad (2.22)$$

$$\exists a, b > 0, a \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2\pi k)|^2 \leq b \quad (2.23)$$

Pour engendrer une AMR, il reste à vérifier les conditions (2.3) et (2.4). La proposition suivantes nous donne les conditions que doit respecter  $\varphi$  pour que la condition (2.3) soit vérifiée.

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  vérifiant (2.23). Alors, en notant  $V_j = \text{Vect}(\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z})$ , on a  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ .*

*Démonstration.* La condition (2.23) implique que  $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base de Riesz de  $V_0$ . En particulier, c'est une frame de  $V_0$ . c'est à dire qu'il existe  $A, B$  deux réels strictement positifs tels que pour tout  $f \in V_0$ ,

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{0,k} \rangle|^2 \leq B \|f\|_2^2$$

On a déjà vu que pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $V_j$  est l'image de  $V_0$  par l'opérateur  $\Delta_j$ , et que  $\varphi_{j,k} = \Delta_j(\varphi_{0,k})$ . Ainsi, comme  $\Delta_j$  est une isométrie, on a, pour tout  $f \in V_j$ ,

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle|^2 \leq B \|f\|_2^2$$

Soit  $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  et  $\varepsilon > 0$ . Par densité des fonction  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , il existe  $\tilde{f}$ , continue à support compact tel que  $\|f - \tilde{f}\|_2 \leq \varepsilon$ . Donc, en appelant  $P_j$  la projection orthogonale sur le sous-espace  $V_j$ , on a pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$\|f - P_j \tilde{f}\|_2 = \|P_j f - P_j \tilde{f}\|_2 \leq \|P_j\| \times \|f - \tilde{f}\|_2 = \|f - \tilde{f}\|_2 \leq \varepsilon$$

En effet,  $f = P_j f$  pour tout  $j$ , et  $\|P_j\| = 1$  car  $P_j$  est un projecteur orthogonal. Ainsi  $\|f\|_2 \leq \varepsilon + \|P_j \tilde{f}\|_2, \forall j \in \mathbb{Z}$ .

On va maintenant s'intéresser à  $\|P_j \tilde{f}\|_2$ . Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , par définition d'un projecteur orthogonal, on a  $\langle \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle = \langle P_j \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle$ . Et comme  $A \|P_j \tilde{f}\|_2^2 \leq$

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} | \langle P_j \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle |^2$ , on en déduit que  $\|P_j \tilde{f}\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}} (\sum_{k \in \mathbb{Z}} | \langle \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle |^2)^{\frac{1}{2}}$ . En posant  $R > 0$  tel que  $\text{Supp} \tilde{f} \subset [-R, R]$ , on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z}} | \langle \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle |^2 &\leq 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_{|x| \leq R} |\tilde{f}(x)| |\varphi(2^j x - k)| dx \right)^2 \\
&\leq 2^j \|\tilde{f}\|_\infty^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_{-R}^R |\varphi(2^j x - k)| dx \right)^2 \\
&\leq 2^j \|\tilde{f}\|_\infty^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2R \int_{-R}^R |\varphi(2^j x - k)|^2 dx, \text{ par Cauchy-Schwarz} \\
&\leq 2R \|\tilde{f}\|_\infty^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-2^j R - k}^{2^j R - k} |\varphi(y)|^2 dy, \text{ avec } y = 2^j x - k \\
&\leq 2R \|\tilde{f}\|_\infty^2 \int_{S_{R,j}} |\varphi(y)|^2 dy, \text{ pour } j \text{ suffisamment petit} \\
&\leq 2R \|\tilde{f}\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}} |\varphi(y)|^2 \chi_{S_{R,j}}(y) dy
\end{aligned}$$

avec  $2^j R \leq \frac{1}{2}$  et  $S_{R,j} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} [-2^j R - k, 2^j R - k]$ . Pour  $y \notin \mathbb{Z}$ ,  $\chi_{S_{R,j}}(y) \xrightarrow{j \rightarrow -\infty} 0$ , donc pour presque tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $|\varphi(y)|^2 \chi_{S_{R,j}}(y) \xrightarrow{j \rightarrow -\infty} 0$ . La fonction  $y \mapsto |\varphi(y)|^2 \chi_{S_{R,j}}(y)$  étant intégrable, en appliquant le théorème de convergence dominée, on a  $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(y)|^2 \chi_{S_{R,j}}(y) dy \xrightarrow{j \rightarrow -\infty} 0$ . Donc il existe  $J \in \mathbb{Z}$  tel que pour tout  $j$  inférieur à  $J$ ,  $2R \|\tilde{f}\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}} |\varphi(y)|^2 \chi_{S_{R,j}}(y) dy \leq A\varepsilon^2$ . On a pour tout  $j \leq J$ ,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} | \langle \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle |^2 \leq A\varepsilon^2 \tag{2.24}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|f\|_2 &\leq \varepsilon + \|P_j \tilde{f}\|_2 \\
&\leq \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} | \langle \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle |^2} \\
&\leq \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{A\varepsilon^2} \\
&\leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Et ce pour tout  $\varepsilon$  assez petit, ce qui achève la preuve.  $\square$

On vient de voir que la condition (2.3) était en fait vérifiée sans ajouter d'autres hypothèses, ce qui n'est pas le cas de la condition (2.4) sur la densité des  $V_j$ . Pour avoir (2.4), on va devoir supposer que la transformée de Fourier de  $\varphi$  est bornée et que  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \neq 0$ , autrement dit que  $\hat{\varphi}(0)$  est non nul. Le début de la preuve sera similaire à la preuve précédente.

**Proposition 2.2.2.** Soit  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  vérifiant (2.23). Supposons de plus  $\hat{\varphi}$  bornée  $\mathbb{R}$ ,  $\hat{\varphi}$  continue en  $\xi = 0$  et  $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ . On définit les  $V_j$  comme précédemment :  $V_j = \overline{\text{Vect}(\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z})}$ . Alors la condition (2.4) est vérifiée :  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.* Comme dans la preuve précédente on traduit (2.23) par l'existence de deux réels  $A, B > 0$  tels que pour tout  $f \in V_j$  et pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

On se donne un  $f$  appartenant à  $(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j)^\perp$  et un  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit. Par densité des fonctions  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , il existe  $\tilde{f}$  fonction  $C^\infty$  à support compact telle que  $\|f - \tilde{f}\|_2 \leq \varepsilon$ .

D'autre part, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $\|P_j \tilde{f}\|_2 = \|P_j(\tilde{f} - f)\|_2$  car  $f \in (\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j)^\perp$ ,  $P_j$  désignant la projection orthogonale sur le sous-espace  $V_j$ . On a  $\|P_j(\tilde{f} - f)\|_2 \leq \|\tilde{f} - f\|_2 \leq \varepsilon$ . Donc  $\|P_j \tilde{f}\|_2 \leq \varepsilon$ .

Puisque  $P_j \tilde{f} \in V_j$ , on a  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle P_j \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle|^2 \leq B\|P_j \tilde{f}\|_2^2$ . Et comme  $\langle \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle = \langle P_j \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle$ , on a

$$\|P_j \tilde{f}\|_2^2 \geq \frac{1}{B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle|^2$$

Comme dans la preuve précédente, on s'intéresse à  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle|^2$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) 2^{j/2} \varphi(2^j x - k) dx \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{\tilde{f}}(\xi) \frac{1}{2^{j/2}} e^{-i \frac{k\xi}{2^j}} \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)} d\xi \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^j} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi 2^j l}^{2\pi 2^j(l+1)} \hat{\tilde{f}}(\xi) e^{i \frac{k\xi}{2^j}} \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)} d\xi \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^j} \left| \int_0^{2\pi 2^j} e^{i \frac{k\xi}{2^j}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{\tilde{f}}(\xi + 2\pi l 2^j) \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j} + 2\pi l\right)} d\xi \right|^2. \end{aligned}$$

On pose  $F(\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{\tilde{f}}(\xi + 2\pi l 2^j) \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j} + 2\pi l\right)}$ . Comme  $F \in L^2_{per}([0, 2\pi 2^j])$ , on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(F)|^2 = \|F\|_{L^2_{per}([0, 2\pi 2^j])}^2 \text{ où, pour tout } k \in \mathbb{Z},$$

$$c_k(F) = \frac{1}{2\pi 2^j} \int_0^{2\pi 2^j} F(x) e^{i k \frac{x}{2^j}} dx.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(F)|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2\pi 2^j)^2} \left| \int_0^{2\pi 2^j} e^{i \frac{k\xi}{2^j}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{\tilde{f}}(\xi + 2\pi l 2^j) \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j} + 2\pi l\right)} d\xi \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi 2^j} \int_0^{2\pi 2^j} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{\tilde{f}}(\xi + 2\pi l 2^j) \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j} + 2\pi l\right)} \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^j} \left| \int_0^{2\pi 2^j} e^{i \frac{k\xi}{2^j}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2\pi l 2^j) \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j} + 2\pi l\right)} d\xi \right|^2 = \\ 2\pi \int_0^{2\pi 2^j} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2\pi l 2^j) \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j} + 2\pi l\right)} \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} | \langle \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle |^2 &= 2\pi \int_0^{2\pi 2^j} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2\pi l 2^j) \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j} + 2\pi l\right)} \right|^2 d\xi \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi 2^j} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2\pi l 2^j) \overline{\hat{f}(\xi + 2\pi k 2^j)} \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j} + 2\pi l\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j} + 2\pi k\right) d\xi \\ &= 2\pi \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi 2^j l}^{2\pi 2^j (l+1)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(t) \overline{\hat{f}(t + 2\pi 2^j (k-l))} \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{t}{2^j}\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{t}{2^j} + 2\pi(k-l)\right) dt \\ &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi + 2\pi k 2^j)} \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j} + 2\pi k\right) d\xi \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)|^2 d\xi + R_j(\tilde{f}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} |R_j(\tilde{f})| &\leq 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| \overline{\hat{f}(\xi + 2\pi k 2^j)} \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j} + 2\pi k\right) d\xi \\ &\leq 2\pi \|\varphi\|_{\infty}^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| \overline{\hat{f}(\xi + 2\pi k 2^j)} d\xi \end{aligned}$$

Puisque  $\tilde{f}$  est  $C^\infty$  à support compact, il existe  $C > 0$  tel que  $|\hat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^2)^{-\frac{3}{2}}$ . Donc

$$\begin{aligned} |R_j(\tilde{f})| &\leq C^2 \|\hat{\varphi}\|_{\infty}^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{3}{2}} (1 + |\xi + 2^j 2\pi k|^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi \\ &\leq C^2 \|\hat{\varphi}\|_{\infty}^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi - 2^j \pi k|^2)^{-\frac{3}{2}} (1 + |\xi + 2^j \pi k|^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi \\ &\leq C' \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} (1 + \pi^2 k^2 2^{2j})^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{-1} d\xi \\ &\leq C'' 2^{-j} \end{aligned}$$

Pour passer de la deuxième à la troisième ligne, on doit commencer par remarquer

$$\sup_{x, y \in \mathbb{R}} (1 + y^2)(1 + (x + y)^2)^{-1}(1 + (x - y)^2)^{-1} \leq M < \infty.$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi - 2^j \pi k|^2)^{-\frac{3}{2}} (1 + |\xi + 2^j \pi k|^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi \\
& \leq M \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi - 2^j \pi k|^2)^{-\frac{1}{2}} (1 + |\xi + 2^j \pi k|^2)^{-\frac{1}{2}} (1 + |\xi|^2)^{-1} d\xi \\
& \leq M (1 + 2^{2j} \pi^2 k^2)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{-1} d\xi,
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue car

$$(1 + |\xi - 2^j \pi k|^2)^{-\frac{1}{2}} (1 + |\xi + 2^j \pi k|^2)^{-\frac{1}{2}} \leq (1 + 2^{2j} \pi^2 k^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

En effet  $(1 + |\xi - 2^j \pi k|^2)(1 + |\xi + 2^j \pi k|^2) = 1 + 2\xi^2 + 2 \times 2^{2j} \pi^2 k^2 + (\xi^2 - 2^{2j} \pi^2 k^2)^2 \geq 1 + 2^{2j} \pi^2 k^2$ .

Comme  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle|^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2^j})|^2 d\xi + R_j(\tilde{f})$ , on a

$$\begin{aligned}
2\pi \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2^j})|^2 d\xi & \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \tilde{f}, \varphi_{j,k} \rangle|^2 + |R_j(\tilde{f})|^2 \\
& \leq B \|P_j \tilde{f}\|^2 + C'' 2^{-j} \\
& \leq B \varepsilon^2 + \frac{C''}{2^j}
\end{aligned}$$

Étudions la limite, quand  $j \rightarrow \infty$  du membre de gauche :  $\hat{\varphi}$  est continue en 0 donc  $|\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2^j})|^2 \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(0)|^2$ . De plus,  $\hat{\varphi}$  étant borné sur  $\mathbb{R}$ , on a pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $|\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2^j})|^2 \leq C |\hat{f}(\xi)|^2$  intégrable car  $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$ . Par le théorème de convergence dominée,

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2^j})|^2 d\xi \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 2\pi |\hat{\varphi}(0)|^2 \|\tilde{f}\|_2^2$$

Donc, en reprenant la dernière inégalité, on a :

$$\|\tilde{f}\|_2 \leq K \frac{\varepsilon}{|\hat{\varphi}(0)|}, \text{ où } K \text{ constante.}$$

De plus, comme  $\|f - \tilde{f}\|_2 \leq \varepsilon$ ,  $\|f\|_2 \leq \varepsilon + \|\tilde{f}\|_2 \leq (1 + \frac{K}{|\hat{\varphi}(0)|})\varepsilon$ . Et ce pour tout  $\varepsilon$  suffisamment petit. Ce qui nous donne bien  $f = 0$ .  $\square$

*Remarque 2.2.3.* Si  $\hat{\varphi}$  est bornée et continue en 0 dans la proposition précédente, alors  $\hat{\varphi}(0) \neq 0$  est nécessaire. Prenons  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $f \neq 0$  avec  $\hat{f} \in [-R, R]$  où  $R > 0$ . Si  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$ , alors  $f = \lim_{j \rightarrow +\infty} P_j f$ . Or

$$\begin{aligned}
\|P_j f\|^2 & \leq A^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle|^2 \\
& \leq A^{-1} (2\pi \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2^j})|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + R_j(f))
\end{aligned}$$

Puisque  $\hat{\varphi}$  est continue en 0, on a par le théorème de convergence dominée

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2^j})|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 2\pi |\hat{\varphi}(0)|^2 \|f\|^2$$

De plus, en utilisant les mêmes arguments que ceux de la preuve précédente, on a  $|R_j(f)| \leq \frac{C}{2^j}$  donc  $R_j(f) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$ . D'où  $\|f\|^2 = \lim_{j \rightarrow +\infty} \|P_j f\|^2 \leq 2\pi A^{-1} |\hat{\varphi}(0)|^2 \|f\|^2$ , et comme  $\|f\| \neq 0$ , il suit que  $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ .

## 2.3 Algorithme en cascade

Dans cette dernière section, nous présentons l'une des raisons principales pour lesquelles l'analyse multirésolution et la décomposition en ondelette sont tant utilisées : l'algorithme en cascade ou algorithme de Mallat. L'efficacité de cet algorithme vient de la structure d'une AMR, qui le rend extrêmement peu coûteux. En effet les sous-espaces  $V_j$  peuvent être vus comme une approximation à la résolution  $j$  d'un signal. Plus  $j$  est petit, plus l'image sera floue.

Le principe de l'algorithme en cascade est de partir d'une résolution  $j_0$  suffisamment fine pour que  $P_{j_0} f$  soit considéré comme une bonne approximation de  $f$ , où  $P_j$  est la projection orthogonal sur le sous-espace  $V_j$ . On dispose donc pour commencer de tous les coefficients  $\langle f, \varphi_{j_0, k} \rangle, k \in \mathbb{Z}$  (qui sont en nombre fini si l'ondelette est à support compact). Chaque étape de l'algorithme consiste à abaisser la résolution d'un niveau (on passe de  $j$  à  $j - 1$ ) puis à calculer les nouveaux coefficients à partir de ceux issus de la résolution supérieur (on calcul les  $\langle f, \psi_{j-1, k} \rangle$ ), on calcul en fait une approximation plus grossière de  $f$ . Avant de passer de nouveau à une résolution inférieur, il reste à encoder les 'détails' (ie. la différence entre le niveau  $j$  et le niveau  $j - 1$ ). On pourrait appliquer ce principe à l'infini mais dans la pratique on n'effectue que quelques itérations. On a finalement décomposé le signal originel en une image très floue et en une somme de détails de plus en plus précis.

### 2.3.1 Algorithme de décomposition

La suite des sous-espace  $V_j$  étant infini, on peut considérer que  $j_0 = 0$ . On pose  $c_{j, k} = \langle f, \varphi_{j, k} \rangle, d_{j, k} = \langle f, \psi_{j, k} \rangle, c^j = \{c_{j, k}, k \in \mathbb{Z}\}$  et  $d^j = \{d_{j, k}, k \in \mathbb{Z}\}$ . On dispose par hypothèse de tous les coefficients  $c_{0, k} = \langle f, \varphi_{0, k} \rangle, k \in \mathbb{Z}$ . Il est alors facile de calculer les  $d^j$  pour  $j \leq -1$ . En effet d'après (2.21),  $\psi =$



$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi_{1,n}$ , où  $g_n = \langle \psi, \varphi_{1,n} \rangle = (-1)^{n+1} \overline{h_{1-n}}$ . Pour tout  $j, k \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(x) &= 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi_{1,n}(2^j x - k) \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \sqrt{2} \varphi(2^{j+1} x - 2k - n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi_{j+1, 2k+n}(x) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \varphi_{j+1,n}(x) \end{aligned}$$

En particulier, pour  $j = -1$ , on a  $d_{-1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g_{n-2k}} \langle f, \varphi_{0,n}(x) \rangle$ . Plus généralement on peut déterminer, pour  $j \leq -1$ , les  $d^j$  à partir des  $c^{j+1}$  :

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g_{n-2k}} \langle f, \varphi_{j+1,n} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g_{n-2k}} c_{j+1,n}. \quad (2.25)$$

De la même manière, comme  $\varphi_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \varphi_{j+1,n}$ , on peut déterminer, pour  $j \leq -1$ , les  $c^j$  à partir des  $c^{j+1}$  :

$$c_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_{n-2k}} c_{j+1,n}. \quad (2.26)$$

On peut esquisser la structure de l'algorithme : partant de  $c^0$ , on calcul  $d^{-1}$  et  $c^{-1}$ . Puis on se sert de  $c^{-1}$  pour calculer  $d^{-2}$  et  $c^{-2}$  etc..

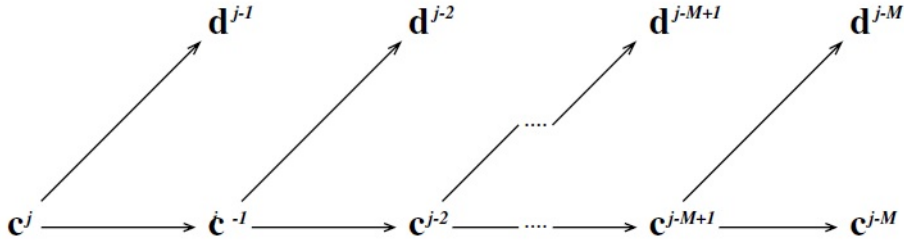


FIGURE 2.1 – Algorithme de décomposition en ondelettes.

### 2.3.2 Complexité de l'algorithme

On peut voir s'il y avait  $N$  coefficients  $c_{j,k}$ , alors (2.25) et (2.26) nous disent qu'il n'y aura que  $\frac{N}{2}$  coefficients  $d_{j-1,k}$  et  $\frac{N}{2}$  coefficients  $c_{j-1,k}$ . Ainsi si la suite  $c^0$  n'est composée que de  $N$  termes, alors on garde en mémoire environ

$\frac{N}{2}$  termes pour  $d^{-1}$ , environ  $\frac{N}{4}$  termes pour  $d^{-2}$ , etc. On a donc environ  $\frac{N}{2^M}$  termes gardés en mémoire pour  $c^{-M}$  après  $M$  décompositions. Ainsi la quantité de données gardée en mémoire est du même ordre que la quantité originelle de données :  $\left(\frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \dots + \frac{N}{2^M}\right) + \frac{N}{2^M} = N$ .

Supposons maintenant que la suite  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  des coefficients du filtre (et donc de l'ondelette père) ne comporte que  $K$  éléments (ce qui est toujours le cas pour des ondelettes à support compact). Alors la suite  $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  des coefficients de l'ondelette mère n'a elle aussi que  $K$  éléments. Si  $c^0$  a  $N$  termes,  $c^{-1}$  en a  $\frac{N}{2}$ . Par (2.26) il faut donc faire  $\frac{KN}{2}$  multiplications. De même, par (2.25), il faut effectuer  $\frac{NK}{2}$  pour obtenir  $d^{-1}$ . En itérant ce procédé, on voit que le nombre d'opérations effectuées au total est

$$\left(\frac{NK}{2} + \frac{NK}{4} + \dots + \frac{NK}{2^M}\right) + \frac{NK}{2^M} = KN.$$

La complexité de l'algorithme, dans le cas où la suite  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est finie, est donc linéaire en  $N$ .

### 2.3.3 Algorithme de reconstruction

Supposons désormais que l'on dispose des suites  $d^{-1}, d^{-2}, \dots, d^{-M}$  et  $c^{-M}$ . Par induction il est suffisant d'étudier la reconstruction de  $c^0$  à partir de  $c^{-1}$  et  $d^{-1}$ . Comme  $V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$ , on a  $P_0 f = P_{-1} f + Q_{-1} f$  avec  $Q_j$  la projection orthogonal sur  $V_j$ . On sait de plus que  $(\varphi_{-1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $V_{-1}$  et que  $(\psi_{-1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $W_{-1}$ . Ainsi  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{0,n} \rangle \varphi_{0,n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{-1,n} \rangle \varphi_{-1,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{-1,n} \rangle \psi_{-1,n}$ . Ce qui donne avec les notations introduites plus haut

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{0,k} \varphi_{0,k} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{-1,k} \varphi_{-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{-1,k} \psi_{-1,k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{-1,k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \varphi_{0,n} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{-1,k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \varphi_{0,n} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (c_{-1,k} h_{n-2k} + d_{-1,k} g_{n-2k}) \varphi_{0,n} \end{aligned}$$

Ainsi

$$c_{0,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (c_{-1,k} h_{n-2k} + d_{-1,k} g_{n-2k}).$$

On peut obtenir  $c^0$  à partir de  $c^{-1}$  et  $d^{-1}$ .

À première vue l'algorithme de décomposition ne semble pas apporter grand chose du point de vue de la compression : on encode  $N$  valeurs avec approximativement  $N$  valeurs ! Cependant la plupart des 'détails'  $d_{j,k}$ , pour  $j$  allant de  $-1$  à  $-M$ , peuvent nuls ou si petits que l'on les remplace par la valeur 0. On peut donc oublier les petits 'détails' obtenus lors de la décomposition et quand même obtenir une reconstruction satisfaisante.

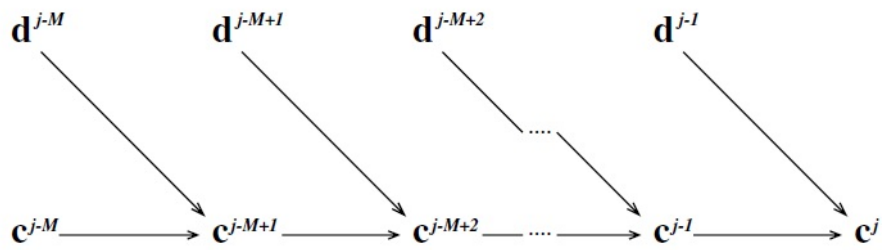


FIGURE 2.2 – Algorithme de reconstruction, la complexité est similaire à celle de l’algorithme de décomposition.

Illustrons pour conclure ce procédé à l’aide d’un exemple. Supposons que l’on ait une figure où les couleurs ont été numéroté sur chacun des 16 carrés. Alors la suite 1, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 6, 6, 6, 6 encode parfaitement l’image. On peut aussi avoir une version ‘floue’ de l’image puis ajouter les détails. Dans ce dernier cas, seuls 8 valeurs sont nécessaires pour encoder l’image. On a alors un taux de compression de 50% et une reconstitution exacte.

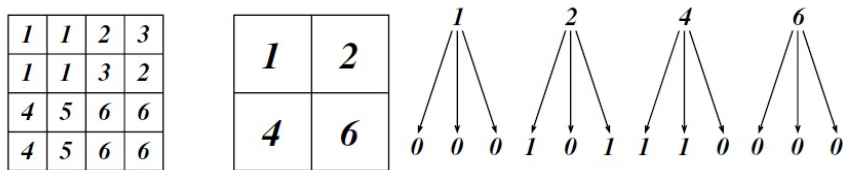


FIGURE 2.3 – Image colorée, image floue et détails.

## Chapitre 3

# Régularité des bases d'ondelettes orthonormales

Nous savons désormais construire des familles d'ondelettes orthogonales, ce qui permet d'optimiser le nombre de coefficients utilisés lors de calculs de décomposition en ondelette d'un signal. On voudrait maintenant construire des bases d'ondelettes possédant la régularité voulue. En effet la régularité est très importante dans certains domaines, par exemple la compression d'images. On décompose le signal  $I$  en ondelettes et on élimine les coefficients trop petits. On fini avec une information finale  $\tilde{I}$  telle que

$$\tilde{I} = \sum_{j,k \in S} \langle I, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k},$$

où  $S$  est l'ensemble de tous les coefficients qui ont été conservés. La différence entre  $\tilde{I}$  et  $I$  sera moins perceptible si les  $\psi_{j,k}$  sont lisses. Pour d'autres applications, c'est la vitesse de décroissance de l'ondelette mère (et donc la vitesse à laquelle les coefficients d'ondelette vont tendre vers 0) qui sera privilégiée. Nous allons ici étudier le lien qui existe entre la régularité de l'ondelette mère  $\psi$  et sa vitesse de décroissance. Nous verrons en particulier que nous devons choisir entre les deux alternatives : il n'existe pas d'ondelette  $C^\infty$  à décroissance exponentielle. En conclusion de ce chapitre, nous verrons quelles sont les conditions que le filtre  $m_0$  doit respecter pour engendrer des ondelettes régulières.

Le premier théorème établit un lien entre la régularité de l'ondelette et l'annulation de ses moments.

**Théorème 3.0.1.** *Si la famille  $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$  est un système orthonormé de  $L^2(\mathbb{R})$  et s'il existe  $\alpha > m + 1$  et  $C > 0$  tels que*

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &\leq C(1 + |x|)^{-\alpha}, \forall x \in \mathbb{R} \\ \psi &\in C^m(\mathbb{R}) \\ \psi^{(l)} &\text{ borné } \forall l \leq m, \end{aligned}$$

alors  $\int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx = 0$ , pour tout  $l \in \{0, 1, \dots, m\}$ .

*Démonstration.* Commençons par donner l'idée générale de la preuve. On peut d'abord remarquer que si  $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  système orthonormé de  $L^2(\mathbb{R})$ , alors  $\psi$  n'est pas identiquement constante. De plus, par orthonormalité,  $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}$ . L'idée est de choisir  $j, k, j', k'$  tels que  $\psi_{j,k}$  soit "étendue" et  $\psi_{j',k'}$  soit "concentrée", autrement dit on va prendre  $j \gg j'$  pour avoir deux échelles très différentes. Ce changement d'échelle sera tellement important que  $\psi_{j,k}$  pourra être assimilé à son développement en série de Taylor lors de son produit scalaire contre  $\psi_{j',k'}$ . Comme  $j \neq j', 0 = \langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle$  et donc l'intégrale du produit de  $\psi_{j',k'}$  contre un polynôme de degré  $m$  est nulle. On peut répéter ce raisonnement pour tout  $k' \in \mathbb{Z}$ , ainsi il existe une famille  $P_{k',m}$  de polynôme de degré  $m$  tels que  $\int_{\mathbb{R}} P_{k',m} \psi_{j',k'} = 0, \forall k' \in \mathbb{Z}$ . En raisonnant de même pour tout  $j' \in \mathbb{Z}$ , on en déduit la condition voulue sur les moments.

On raisonne par récurrence sur  $l$ . La preuve pour  $l = 0$  et le cas général étant la même, on suppose directement que  $\int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x) = 0$  pour tout entier  $n < l$ . La fonction  $\psi^{(l)}$  étant continue ( $l \leq m$  et  $\psi \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R})$ ) et l'ensemble des rationnels dyadiques  $\{2^j k, j, k \in \mathbb{Z}\}$  étant dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe deux entiers  $J, K$  tels que  $f^{(l)}(2^J K) \neq 0$  (dans le cas contraire  $\psi^{(l)}$  serait identiquement nulle par continuité, ce qui impliquerait que  $\psi$  est constante si  $l = 0, 1$  ou que  $\psi$  polynôme d'ordre  $l - 1 \geq 1$  sinon, et donc que  $\psi$  est non bornée. Les deux cas sont contradictoires avec les hypothèses). De plus,  $\psi$  étant  $\mathcal{C}^m(\mathbb{R})$ , on peut effectuer son développement en série de Taylor jusqu'à l'ordre  $l \leq m$  :

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^l \frac{\psi^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^l).$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout réel  $x$  vérifiant  $|x - 2^J K| \leq \delta$ , on ait :  $|\psi(x) - \sum_{n=0}^l \frac{\psi^{(n)}(2^J K)}{n!} (x - 2^J K)^n| \leq \varepsilon |x - 2^J K|^l$ . On se donne maintenant un entier  $j$  vérifiant  $j > J$  et  $j > 0$ . On a donc pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\langle \psi_{0,k}, \psi_{j,k} \rangle = 0$ . Ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \psi_{0,0}, 2^{-\frac{j}{2}} \psi_{j,2^j+K} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \overline{\psi(2^j x - 2^j 2^J K)} dx \\ &= \sum_{n=0}^l \frac{\psi^{(n)}(2^J K)}{n!} \int_{\mathbb{R}} (x - 2^J K)^n \overline{\psi(2^j x - 2^j 2^J K)} dx + \\ &\int_{\mathbb{R}} (\psi(x) - \sum_{n=0}^l \frac{\psi^{(n)}(2^J K)}{n!} (x - 2^J K)^n) \overline{\psi(2^j x - 2^j 2^J K)} dx \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence,  $\int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x) dx = 0$  pour  $n < l$ , donc le premier terme se résume à

$$\frac{\psi^{(l)}(2^J K)}{l!} \int_{\mathbb{R}} (x - 2^J K)^l \overline{\psi(2^j x - 2^j 2^J K)} dx.$$

On va maintenant se servir de l'hypothèse  $\psi^{(l)}(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R} \forall l \leq m$  pour

majorer le second terme. Ainsi il existe  $M > 0$  tel que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}} (\psi(x) - \sum_{n=0}^l \frac{\psi^{(n)}(2^j K)}{n!} (x - 2^j K)^n) \overline{\psi(2^j x - 2^j 2^j K)} dx \right| \\
& \leq \varepsilon \int_{|x-2^j K| \leq \delta} |x - 2^j K|^l |\psi(2^j(x - 2^j K))| dx \\
& \quad + \int_{|x-2^j K| > \delta} (M + \sum_{n=0}^l \frac{M}{n!} |x - 2^j K|^n) |\psi(2^j x - 2^j 2^j K)| dx \\
& \leq \varepsilon \int_{|x-2^j K| \leq \delta} |x - 2^j K|^l |\psi(2^j(x - 2^j K))| dx \\
& \quad + M \int_{|x-2^j K| > \delta} (1 + \sum_{n=0}^l |x - 2^j K|^n) |\psi(2^j(x - 2^j K))| dx \\
& \leq \varepsilon \int_{|y| \leq \delta} |y|^l |\psi(2^j y)| dy + M \int_{|y| > \delta} (1 + \sum_{n=0}^l |y|^n) |\psi(2^j y)| dy, \text{ avec } y = x - 2^j K
\end{aligned}$$

On utilisé maintenant le fait que  $y \mapsto \frac{1 + \sum_{n=0}^l |y|^n}{1 + |y|^l}$  est continue et bornée (la limite de cette fonction vaut 1 en  $+\infty$ ). Ainsi il existe une constante  $C_1$  telle que

$$1 + \sum_{n=0}^l |y|^n \leq C_1 (1 + |y|^l).$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}} (\psi(x) - \sum_{n=0}^l \frac{\psi^{(n)}(2^j K)}{n!} (x - 2^j K)^n) \overline{\psi(2^j x - 2^j 2^j K)} dx \right| \\
& \leq \varepsilon \int_{|y| \leq \delta} |y|^l |\psi(2^j y)| dy + M' \int_{|y| > \delta} (1 + |y|^l) |\psi(2^j y)| dy \\
& \leq C\varepsilon \int_{|y| \leq \delta} |y|^l ((1 + |2^j y|)^{-\alpha} dy + M' C \int_{|y| > \delta} (1 + |y|^l) ((1 + |2^j y|)^{-\alpha} dy \\
& \leq 2\varepsilon C \int_0^\delta y^l (1 + 2^j y)^{-\alpha} dy + 2M' C \int_\delta^\infty (1 + y)^l (1 + 2^j y)^{-\alpha} dy \\
& \leq 2\varepsilon C 2^{-j(l+1)} \int_0^{2^j \delta} t^l (1 + t)^{-\alpha} dt + 2M' C \int_\delta^\infty (1 + t)^l (1 + 2^j t)^{-\alpha} dt \\
& \leq 2\varepsilon C 2^{-j(l+1)} \int_0^\infty t^l (1 + t)^{-\alpha} dt + 2M' C 2^{-j\alpha} (\frac{1 + \delta}{\delta})^\alpha \int_\delta^\infty (1 + t)^{l-\alpha} dt \\
& \leq C_1 \varepsilon 2^{-j(l+1)} + C_2 2^{-j\alpha} (\frac{1 + \delta}{\delta})^\alpha
\end{aligned}$$

avec  $C_1, C_2$  ne dépendants que de  $M, \alpha$  et  $l$  et indépendantes de  $\varepsilon, \delta$  et  $j$ .

Pour obtenir l'avant-dernière inégalité, on a utilisé, pour  $t$  supérieur à  $\delta$  :

$$(1 + 2^j t)^{-1} \leq \frac{1 + \delta}{1 + 2^j \delta} (1 + t)^{-1} \leq 2^{-j} \frac{1 + \delta}{\delta} (1 + t)^{-1},$$

où  $(1 + 2^j t)^{-1} \leq \frac{1 + \delta}{1 + 2^j \delta} (1 + t)^{-1}$  par décroissance, pour  $j > 0$ , de la fonction  $t \mapsto \frac{1 + t}{1 + 2^j t}$ .

Nous avons donc montré que

$$0 \leq \frac{\psi^{(l)}(2^j K)}{l!} 2^{-j(l+1)} \int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx + C_1 \varepsilon 2^{-j(l+1)} + C_2 2^{-j\alpha} \delta^{-\alpha} (1 + \delta)^{l+1}.$$

Ce qui nous conduit à poser  $\beta$  tel que  $|\beta| \leq C_1 \varepsilon 2^{-j(l+1)} + C_2 2^{-j\alpha} \delta^{-\alpha} (1 + \delta)^{l+1}$ . Ainsi

$$0 = \frac{\psi^{(l)}(2^j K)}{l!} 2^{-j(l+1)} \int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx + |\beta|$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx = - \left( \frac{\psi^{(l)}(2^j K)}{l!} 2^{-j(l+1)} \right)^{-1} |\beta|$$

Et

$$\left| \int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx \right| = \left| \frac{\psi^{(l)}(2^j K)}{l!} \right|^{-1} 2^{+j(l+1)} |\beta|$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx \right| \leq l! (|\psi^{(l)}(2^j K)|)^{-1} (C_1 \varepsilon + C_2 2^{-j(\alpha-l-1)} \delta^{-\alpha} (1 + \delta)^{l+1})$$

On prend alors  $\varepsilon$  arbitrairement petit et pour chaque  $\delta$  correspondant, on peut choisir  $j$  suffisamment grand pour que le second membre tende aussi vers 0. Il s'ensuit que  $\int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx = 0$  ce qui achève la récurrence et la démonstration.  $\square$

Voici maintenant l'alternative annoncée plus haut : une ondelette ne peut être  $C^\infty$  tout en étant à décroissance exponentielle.

**Corollaire 3.0.2.** *Soit  $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  un système orthonormé de  $L^2(\mathbb{R})$ . Alors  $\psi$  ne peut être à décroissance exponentielle tout en étant  $C^\infty$  à dérivées bornées.*

*Démonstration.* Si  $\psi \in C^\infty$  est à décroissance exponentielle et à dérivées bornées, alors d'après le théorème 3.0.1 on a pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx = 0$$

Ce qui implique

$$\frac{d^l}{d\xi^l} \hat{\psi} \Big|_{\xi=0} = 0, \text{ pour tout } l \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

Montrons maintenant que si  $\psi$  est à décroissance exponentielle, alors  $\hat{\psi}$  est analytique. La fonction  $t \rightarrow e^{-itz} f(t)$  est intégrable si, et seulement si,  $e^{tImz} |f(t)| \in L^1(\mathbb{R})$ . La fonction  $f$  est à décroissance exponentielle, il existe donc  $C > 0$  et un nombre réel  $\lambda > 0$  tels que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(t)| \leq C e^{-\lambda|t|}.$$

Ainsi si  $|Imz| < \lambda$ , alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{tImz} |f(t)| dt &\leq C \int_{\mathbb{R}} e^{tImz} e^{-\lambda|t|} dt \\ &\leq C \int_{-\infty}^0 e^{tImz} e^{\lambda t} dt + C \int_0^{+\infty} e^{tImz} e^{-\lambda t} dt \\ &\leq C \left( \int_{-\infty}^0 e^{t(Imz+\lambda)} dt + \int_0^{+\infty} e^{t(Imz-\lambda)} dt \right) \\ &< +\infty, \text{ car } Imz + \lambda > 0 \text{ et } Imz - \lambda < 0. \end{aligned}$$

Ainsi  $t \rightarrow e^{-itz} f(t)$  est intégrable. Soit  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(z+h) - \hat{f}(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it(z+h)} dt - \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itz} dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{e^{-it(z+h)} - e^{-itz}}{h} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} -ite^{-itz} f(t) dt < +\infty, \end{aligned}$$

où la limite est finie pour les mêmes raisons que précédemment. On a ainsi que  $\psi$  est holomorphe et donc analytique sur un certain domaine  $|Im\xi| < \lambda$ . Comme  $\hat{\psi}$  vérifie aussi (3.1),  $\psi \equiv 0$ , ce qui est impossible car la famille  $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  forme un système orthonormé.  $\square$

Terminons par une dernière propriété nous donnant des informations sur le filtre  $m_0$  en fonction des conditions de régularité.

**Proposition 3.0.3.** *Soit  $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  une base orthonormée d'ondelettes associée à une analyse multirésolution. Si il existe  $\varepsilon > 0$  et  $C > 0$  tels que*

$$|\varphi(x)|, |\psi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-m-1-\varepsilon},$$

si de plus  $\psi \in C^m(\mathbb{R})$  et  $\psi^{(l)}$  borné pour tout  $l \leq m$ , alors le filtre  $m_0$  se factorise en

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^{m+1} \mathcal{L}(\xi) \quad (3.2)$$

où  $\mathcal{L}$  est  $2\pi$ -périodique et de classe  $C^m$ .

*Démonstration.* Par le théorème 3.0.1, on a pour tout  $l \leq m$ ,  $\int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx = 0$

et donc  $\frac{d^l}{d\xi^l} \hat{\psi} \Big|_{\xi=0} = 0$ . D'autre part  $\hat{\psi}(\xi) = e^{-i\frac{\xi}{2}} \overline{m_0(\frac{\xi}{2} + \pi)} \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2})$ , par (2.14). On a

$$\int_{\mathbb{R}} |x^m \psi(x)| dx \leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^m}{(1 + |x|)^{m+1+\varepsilon}} dx < +\infty,$$

donc  $x^m \psi(x) \in L^1(\mathbb{R})$  et donc  $\hat{\psi}^{(m)}$  est continue, ainsi  $\hat{\psi}$  et  $\hat{\varphi}$  sont de classe  $C^m$ . De plus, par la remarque 2.2.3  $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ , on obtient donc que  $m_0$  est  $m$  fois différentiable en  $\xi = \pi$ . Ainsi, pour tout  $l \leq m$ ,  $\frac{d^l}{d\xi^l} m_0 \Big|_{\xi=\pi} = 0$ . Autrement dit



$\pi$  est une racine de multiplicité  $m + 1$  de  $m_0$ , ce qui nous amène naturellement à poser

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^{m+1} \mathcal{L}(\xi),$$

où l'on a divisé par 2 pour obtenir  $m_0(2k\pi) = \mathcal{L}(2k\pi)$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .  $m_0$  étant  $2\pi$ -périodique et de classe  $C^m$ , il en est de même pour  $\mathcal{L}$ .

□

Cette factorisation montre la nécessité de partir d'un filtre  $m_0$  de la forme (3.2) pour construire des ondelettes suffisamment régulières.

## Chapitre 4

# Bases d'ondelettes à support compact

A l'exception de la base de Haar, on ne sait pour l'instant construire que des ondelettes de support infini. Il y a donc une infinité de coefficients que l'on rend nuls, ce qui engendre des erreurs lors de la décomposition d'un signal. C'est pourquoi l'on cherche à construire des bases d'ondelettes qui vérifient les propriétés vues précédemment (orthonormalité et une certaine régularité) tout en étant à support compact. La première famille d'ondelette vérifiant toutes ces propriétés fut trouvée par Ingrid Daubechies à la fin des années 1980.

Pour construire une base d'ondelettes  $(\psi_{j,k})_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}}$  à support compact, on va partir d'une ondelette père  $\varphi \in V_0$  elle-même à support compact. D'après (2.2),  $\varphi \in V_1$ . Donc, dans  $V_1$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{1,k}(x)$ , où les  $h_k$  sont les coordonnées de  $\varphi$  dans la base hilbertienne  $(\varphi_{1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $V_1$  :  $h_k = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\varphi_{1,k}(x)} dx$ . Comme  $\varphi$  est à support compact, il n'y a qu'un nombre fini d'indices  $k \in \mathbb{Z}$  tels que  $h_k \neq 0$ . Donc, d'après (2.21), il n'y a qu'un nombre fini d'indices  $\lambda_k, k \in \mathbb{Z}$ . Autrement dit l'ondelette mère  $\psi$  est alors une combinaison linéaire finie de fonctions à support compact, donc elle-même à support compact.

L'ondelette père  $\varphi$  et son filtre  $m_0$  étant définis à partir des mêmes coefficients, on va déterminer  $\varphi$  à partir de  $m_0$ .

### 4.1 Construction de $m_0$

On va construire des filtres  $m_0$  qui seront des polynômes trigonométriques vérifiant la condition de régularité (3.2) et la condition nécessaire (2.13) (conséquence de l'orthonormalité des  $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ ).

Comme  $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi}$  et que les  $h_k$  sont en nombre fini (on veut  $\varphi$  à support compact),  $m_0$  est désormais un polynôme trigonométrique. Par conséquent, la condition (2.13) s'écrit  $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1$  avec cette fois-ci l'égalité vraie partout car  $m_0$  est continue.

On veut de plus que  $\psi$  soit suffisamment régulière, il faut donc que  $m_0$

respecte la condition (3.2) :

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi), N \geq 1, \mathcal{L} \text{ polynôme trigonométrique.} \quad (4.1)$$

Grâce à (4.1) et à (2.13), on va pouvoir déterminer complètement  $m_0$ . On pose

$$\begin{aligned} M_0(\xi) &= |m_0(\xi)|^2 \\ &= \left| \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N \right|^2 |\mathcal{L}(\xi)|^2 \\ &= \left( \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right)^N |\mathcal{L}(\xi)|^2, \text{ car } \left| \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right| = \left| \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \right| \\ &= \left( \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right)^N L(\xi), \end{aligned}$$

avec  $L(\xi) = |\mathcal{L}(\xi)|^2$  polynôme en  $\cos(\xi)$  car  $\mathcal{L}(\xi)$  polynôme trigonométrique. Sachant que  $\frac{1 - \cos(\xi)}{2} = \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)$ , il existe un polynôme  $P$  tel que  $L(\xi) = P(\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right))$ . On a donc  $M_0(\xi) = \left(\cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^N P(\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right))$ .

En injectant ceci dans la condition (2.13), et en se souvenant que  $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$  et  $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$  on obtient :

$$\begin{aligned} 1 &= M_0(\xi) + M_0(\xi + \pi) \\ &= \left( \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right)^N P(\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)) + \left( \cos^2\left(\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \right)^N P(\sin^2\left(\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)) \\ &= \left( \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right)^N P(\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)) + \left( \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right)^N P(\cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right)) \\ &= \left( \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right)^N P(1 - \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right)) + \left( 1 - \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right)^N P(\cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right)) \\ &= y^N P(1 - y) + (1 - y)^N P(y), \text{ en posant } y = \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{aligned}$$

On étudie donc la contrainte

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1 \quad (4.2)$$

qui est valable pour tout  $y \in [0, 1]$ , donc pour tout  $y \in \mathbb{R}$ .

Grâce au théorème de Bezout, on va pouvoir déterminer  $P$ .

**Théorème 4.1.1.** *Soient  $p_1, p_2$  deux polynômes sans racines communes, de degrés respectifs  $n_1$  et  $n_2$ . Alors il existe de manière unique deux polynômes  $q_1$  et  $q_2$  de degrés respectifs inférieurs ou égaux à  $n_2 - 1$  et  $n_1 - 1$  tels que*

$$p_1(x)q_1(x) + p_2(x)q_2(x) = 1$$

*Démonstration.* Commençons par prouver l'existence. On peut supposer que  $\deg p_2 \leq \deg p_1$ . Il existe donc deux polynômes  $a_2, b_2$  tels que  $p_1 = a_2 p_2 + b_2$ ,

avec  $\deg a_2 = \deg p_1 - \deg p_2$  et  $\deg b_2 < \deg p_2$ . De même il existe  $a_3, b_3$  tels que  $p_2 = a_3 b_2 + b_3$  avec  $\deg a_3 = \deg p_2 - \deg b_2$  et  $\deg b_3 < \deg b_2$ .

En itérant le procédé, on construit deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

$$b_{n-1} = a_{n+1} b_n + b_{n+1}, \text{ avec } b_0 = p_1, b_1 = p_2 \quad (4.3)$$

avec les contraintes  $\deg a_{n+1} = \deg b_{n-1} - \deg b_n$  et  $\deg b_{n+1} < \deg b_n$ . La suite d'entiers  $(\deg b_n)_n$  étant strictement décroissante, il existe un entier  $N$  tel que  $b_{N+1} = 0$  et  $b_N \neq 0$ . On a donc la relation  $b_{N-1} = a_{N+1} b_N$ , et l'on voit ainsi que  $b_N$  divise  $b_{N-1}$ . Comme  $b_{N-2} = a_N b_{N-1} + b_N = a_N a_{N+1} b_N + b_N$ , on a  $b_N$  divise aussi  $b_{N-2}$ . Par induction, on déduit que  $b_N$  divise  $b_n$ , pour tout  $n \leq N$ . Par construction  $b_0 = p_1$  et  $b_1 = p_2$ , ainsi  $b_N$  divise  $p_1$  et  $p_2$ . Ces deux polynômes n'ayant pas de racines communes par hypothèse,  $b_N$  est une constante non nulle. En utilisant (4.3), on peut écrire

$$\begin{aligned} b_N &= b_{N-2} - a_N b_{N-1} \\ &= b_{N-2} - a_N (b_{N-3} - a_{N-1} b_{N-2}) \\ &= (1 + a_N a_{N-1}) b_{N-2} - a_N b_{N-3} \\ &= \dots \\ &= \alpha_k b_{N-k} + \beta_k b_{N-k-1}, \text{ pour tout } k \leq N \end{aligned}$$

avec  $(\alpha_k)_{k \in \{1, \dots, N-1\}}$  et  $(\beta_k)_{k \in \{1, \dots, N-1\}}$  deux suites définies par récurrence de la manière suivante :  $\alpha_1 = -a_N$  et  $\beta_1 = 1$  ;  $\alpha_{k+1} = \beta_k - \alpha_k a_{N-k}$ ,  $\beta_{k+1} = \alpha_k$ . On montre par récurrence que

$$\deg \alpha_k = \deg b_{N-k-1} - \deg b_{N-1},$$

et  $\deg \beta_k = \deg b_{N-k} - \deg b_{N-1}$ . En prenant  $k = N - 1$ , on a

$$b_N = \alpha_{N-1} b_1 + \beta_{N-1} b_0 = \alpha_{N-1} p_2 + \beta_{N-1} p_1.$$

Avec  $\deg \alpha_{N-1} = \deg p_1 - \deg b_{N-1} < \deg p_1$  et  $\deg \beta_{N-1} = \deg p_2 - \deg b_{N-1} < \deg p_2$ , en effet  $\deg b_{N-1} \geq 1$  (si  $\deg b_{N-1} = 0$  alors  $b_N$  serait nul). En posant  $q_1 = \frac{\beta_{N-1}}{b_N}$  et  $q_2 = \frac{\alpha_{N-1}}{b_N}$ , on a deux polynômes vérifiant  $p_1(x)q_1(x) + p_2(x)q_2(x) = 1$  et satisfaisants les conditions sur les degrés.

Reste à prouver l'unicité. Supposons que  $q_1, q_2$  d'une part,  $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$  d'autre part soient solutions du problème. On peut alors écrire  $p_1(q_1 - \tilde{q}_1) + p_2(q_2 - \tilde{q}_2) = 0$ . Comme  $p_1, p_2$  n'ont pas de racine commune, toute racine de  $p_2$  est racine de  $q_1 - \tilde{q}_1$  avec au moins la même multiplicité. Si  $q_1 \neq \tilde{q}_1$ , alors  $\deg q_1 - \tilde{q}_1 \geq \deg p_2$ . Or  $\deg q_1, \deg \tilde{q}_1 < \deg p_2$  par hypothèse. Donc  $q_1 = \tilde{q}_1$ , ce qui entraîne  $q_2 = \tilde{q}_2$ .  $\square$

Il existe ainsi, de manière unique, deux polynômes  $q_1$  et  $q_2$  de degrés inférieurs ou égaux à  $N - 1$  tels que

$$(1 - y)^N q_1(y) + y^N q_2(y) = 1$$

Et, en évaluant cette égalité en  $1 - y$ , on a :

$$(1 - y)^N q_2(1 - y) + y^N q_1(1 - y) = 1$$

Par unicité de  $q_1$  et  $q_2$ , on en déduit que  $q_2(y) = q_1(1 - y)$ . On a ainsi une solution  $P(y) = q_1(y)$  de (4.2). Dans ce cas précis, on peut alors déterminer la forme explicite de  $q_1$  :

$$q_1(y) = (1 - y)^{-N}(1 - y^N q_1(1 - y))$$

Mais,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1 - y)^N} \\ &= 1 + \frac{N}{(1 - 0)^{N+1}}y + \frac{N(N + 1)}{2!(1 - 0)^{N+2}}y^2 + \dots + \frac{N(N + 1)\dots(N + N - 2)}{(N - 1)!(1 - 0)^{N+N-1}}y^{N-1} + \mathcal{O}(y^N) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N(N + 1)\dots(N + k - 1)}{k!}y^k + \mathcal{O}(y^N) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N + k - 1}{k}y^k + \mathcal{O}(y^N) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} q_1(y) &= \left( \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N + k - 1}{k}y^k + \mathcal{O}(y^N) \right) (1 - y^N q_1(1 - y)) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N + k - 1}{k}y^k + \mathcal{O}(y^N) - y^N q_1(1 - y) \left( \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N + k - 1}{k}y^k + \mathcal{O}(y^N) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N + k - 1}{k}y^k + \mathcal{O}(y^N) \end{aligned}$$

car  $y^N q_1(1 - y) \left( \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N + k - 1}{k}y^k + \mathcal{O}(y^N) \right) = \mathcal{O}(y^N)$ . Puisque  $\deg q_1 \leq N - 1$ ,  $q_1$  est égal aux  $N$  premiers termes de son développement en série de Taylor. On a donc  $q_1(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N + k - 1}{k}y^k$  solution explicite de (4.2). On constate de plus que, pour  $y \in [0, 1]$ , cette solution  $q_1$  est positive, ce qui en fait un bon candidat pour déterminer  $L(\xi) = |\mathcal{L}(\xi)|^2$ . Notons que  $q_1$  est l'unique solution de degré minimum, que l'on notera par la suite  $P_N$ . Il existe de nombreuses solutions  $P$  de degré supérieur. Comme elles vérifient l'identité

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1,$$

on a, pour toute solution  $P$  de (4.2),

$$(1 - y)^N (P - P_N)(y) + y^N (P - P_N)(1 - y) = 0$$

Cette dernière identité implique que  $P - P_N$  est divisible par  $y^N$ . Autrement dit, il existe un polynôme  $\tilde{P}$  tel que :

$$(P - P_N)(y) = y^N \tilde{P}(y)$$

On a :

$$(1 - y)^N y^N \tilde{P}(y) + y^N (1 - y)^N \tilde{P}(1 - y) = 0$$

Soit  $\tilde{P}(y) + \tilde{P}(1-y) = 0$ . Ainsi  $\tilde{P}$  est impair d'axe de symétrie  $\frac{1}{2}$ .

On peut résumer les conditions nécessaires trouvées sur le filtre  $m_0$  pour avoir une base d'ondelette régulière et à support compact dans la proposition suivante :

**Théorème 4.1.2.** *Un polynôme trigonométrique  $m_0$  vérifie (2.13) tout en étant de la forme  $m_0(\xi) = \left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^N \mathcal{L}(\xi)$  où  $N \geq 1$  et  $\mathcal{L}$  un polynôme trigonométrique si, et seulement si, le polynôme  $L(\xi) = |\mathcal{L}(\xi)|^2$  s'écrit  $L(\xi) = P(\sin^2(\frac{\xi}{2}))$ , avec  $P(y) = P_N(y) + y^N R(\frac{1}{2}-y)$ , où  $P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k$  et  $R$  est une fonction polynôme impaire telle que  $P(y) \geq 0, \forall y \in [0, 1]$ .*

La caractérisation de notre filtre n'est pas encore complète. En effet on a un condition sur  $L(\xi)$ , mais c'est le polynôme trigonométrique  $\mathcal{L}(\xi)$  qui nous intéresse. Nous allons donc nous servir du lemme suivant, dû à Riesz, pour extraire la racine carrée de  $L$ . Ce procédé est aussi appelé factorisation spectrale.

**Lemme 4.1.3.** *Soit  $A$  un polynôme trigonométrique positif et invariant par la substitution  $\xi \rightarrow -\xi$ , alors il existe un polynôme trigonométrique  $B$  de degré  $M$*

$$ie : B(\xi) = \sum_{m=0}^M b_m e^{im\xi}; b_m \in \mathbb{R}$$

tel que  $|B(\xi)|^2 = A(\xi)$ .

*Démonstration.* Comme  $A$  un polynôme trigonométrique positif et invariant par la substitution  $\xi \rightarrow -\xi$ ,  $A$  peut s'écrire sous la forme

$$A(\xi) = \sum_{m=0}^M a_m \cos(m\xi); a_m \in \mathbb{R}$$

On a

$$\begin{aligned} A(\xi) &= \sum_{m=0}^M a_m \cos(m\xi) \\ &= \sum_{m=0}^M a_m T_m(\cos(\xi)) \\ &= p_A(\cos(\xi)) \end{aligned}$$

où  $T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$  est le  $n^{ieme}$  polynôme de Chebychev et  $p_A$  un polynôme d'ordre  $M$  à coefficients réels. Le polynôme  $p_A$  se factorise en  $p_A(c) = \alpha \prod_{j=1}^M (c - c_j)$ , où les  $c_j$  sont les racines de  $p_A$ . Comme  $p_A$  est à coefficients réels, on peut dès maintenant observer que ses racines sont soit complexes conjuguées, soit réels.

$A$  étant un polynôme trigonométrique, il peut s'écrire sous la forme  $A(\xi) = \sum_{k=-M}^M \alpha_k e^{ik\xi}$ . Et donc on a :

$$\begin{aligned} A(\xi) &= e^{iM\xi} \sum_{k=-M}^M \alpha_k e^{i(k-M)\xi} \\ &= e^{iM\xi} \sum_{k=0}^{2M} \alpha_{M-k} (e^{-i\xi})^k \\ &= e^{iM\xi} P_A(e^{-i\xi}), \text{ avec } P_A \text{ polynôme d'ordre } 2M. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout réel  $\xi$ ,  $A(\xi) = p_A(\cos(\xi)) = e^{iM\xi} P_A(e^{-i\xi})$ . D'où

$$\begin{aligned} P_A(e^{-i\xi}) &= e^{-iM\xi} p_A\left(\frac{e^{i\xi} + e^{-i\xi}}{2}\right) \\ &= e^{-iM\xi} \alpha \prod_{j=1}^M \left(\frac{e^{i\xi} + e^{-i\xi}}{2} - c_j\right) \\ &= \alpha \prod_{j=1}^M \left(\frac{1}{2} - c_j e^{-i\xi} + \frac{(e^{-i\xi})^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi pour tout  $z$  de module 1, on a

$$P_A(z) = \alpha \prod_{j=1}^M \left(\frac{1}{2} - c_j z + \frac{z^2}{2}\right)$$

L'égalité étant vrai pour tout  $z$  tel que  $|z| = 1$ , elle l'est pour tout complexe  $z$ .

Nous allons par la suite nous intéresser aux différents types de  $c_j$  possibles. On considère d'abord que  $c_j$  est réelle. Les racines du polynôme  $\frac{1}{2} - c_j z + \frac{z^2}{2}$ , de discriminant  $\Delta = c_j^2 - 1$ , sont :

$$\text{- si } |c_j| \geq 1, r_{j,1} = c_j + \sqrt{\Delta} \text{ et } r_{j,2} = c_j - \sqrt{\Delta} = \frac{(c_j - \sqrt{c_j^2 - 1})(c_j + \sqrt{c_j^2 - 1})}{c_j + \sqrt{c_j^2 - 1}} =$$

$$\frac{1}{r_{j,1}}, \text{ soit deux racines réelles } r_j \text{ et } \frac{1}{r_j},$$

$$\text{- si } |c_j| < 1, \text{ deux racines complexes conjuguées de valeurs absolues } 1 : e^{i\alpha_j}, e^{-i\alpha_j}.$$

De plus, dans le cas  $|c_j| < 1$ , les racines de  $\frac{1}{2} - c_j z + \frac{z^2}{2}$  sont des racines de  $A$

( $A(\xi) = \alpha \prod_{j=1}^M (\cos(\xi) - c_j)$ ).  $A$  étant positif, leurs multiplicité est paire.

Si maintenant  $c_j$  n'est pas réelle, sachant que  $\bar{c}_j$  est aussi racine de  $A$ , on considère le polynôme  $(\frac{1}{2} - c_j z + \frac{z^2}{2})(\frac{1}{2} - \bar{c}_j z + \frac{z^2}{2})$ . Il possède quatre racines distinctes  $c_j \pm \sqrt{c_j^2 - 1}, \bar{c}_j \pm \sqrt{\bar{c}_j^2 - 1}$  qui forment un quadruplet  $z_j, \frac{1}{z_j}, \bar{z}_j, \frac{1}{\bar{z}_j}$ .

Réécrivons le polynôme  $P_A$  en posant  $\alpha = \frac{a_M}{2}$  et en distinguant les trois

types de racines possible :

$$P_A(z) = \left( \frac{1}{2} a_M \prod_{j=1}^J (z - z_j)(z - \bar{z}_j)(z - \frac{1}{z_j})(z - \frac{1}{\bar{z}_j}) \right) \cdot \left( \prod_{k=1}^K (z - e^{i\alpha_k})^2 (z - e^{-i\alpha_k})^2 \right) \left( \prod_{l=1}^L (z - r_l)(z - \frac{1}{r_l}) \right)$$

Remarquons en outre que

$$|e^{-i\xi} - \frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} |1 - e^{-i\xi} z| = \frac{1}{|z|} |e^{i\xi} - \bar{z}| = \frac{1}{|z|} |e^{-i\xi} - z|,$$

ce qui nous donne  $|(e^{-i\xi} - z)(e^{-i\xi} - \frac{1}{z})| = \frac{1}{|z|} |e^{-i\xi} - z|^2$ .

On a ainsi :

$$\begin{aligned} A(\xi) &= |A(\xi)| = |P_A(e^{-i\xi})| \\ &= \left( \frac{1}{2} |a_M| \prod_{j=1}^J |(e^{-i\xi} - z_j)(e^{-i\xi} - \frac{1}{z_j})| |(e^{-i\xi} - \bar{z}_j)(e^{-i\xi} - \frac{1}{\bar{z}_j})| \right) \\ &\quad \times \left( \prod_{k=1}^K |e^{-i\xi} - e^{i\alpha_k}|^2 |e^{-i\xi} - e^{-i\alpha_k}|^2 \right) \left( \prod_{l=1}^L |e^{-i\xi} - r_l| |e^{-i\xi} - \frac{1}{r_l}| \right) \\ &= \frac{1}{2} |a_M| \prod_{j=1}^J \frac{1}{|z_j|^2} \left| \prod_{j=1}^J (e^{-i\xi} - z_j)(e^{-i\xi} - \bar{z}_j) \right|^2 \\ &\quad \times \left| \prod_{k=1}^K (e^{-i\xi} - e^{i\alpha_k})(e^{-i\xi} - e^{-i\alpha_k}) \right|^2 \prod_{l=1}^L \frac{1}{|r_l|} \left| \prod_{l=1}^L (e^{-i\xi} - r_l) \right|^2 \\ &= |B(\xi)|^2 \end{aligned}$$

où  $B$  est défini par la formule :

$$\begin{aligned} B(\xi) &= \left( \frac{1}{2} |a_M| \prod_{j=1}^J \frac{1}{|z_j|^2} \prod_{l=1}^L \frac{1}{|r_l|} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^J (e^{-2i\xi} - 2e^{-i\xi} \operatorname{Re}(z_j) + |z_j|^2) \\ &\quad \times \prod_{k=1}^K (e^{-2i\xi} - 2e^{-i\xi} \cos(\alpha_k) + 1) \prod_{l=1}^L (e^{-i\xi} - r_l) \end{aligned}$$

est bien un polynôme trigonométrique d'ordre  $M$  à coefficients réels.  $\square$

*Remarque 4.1.4.* La positivité du polynôme trigonométrique explique au passage pourquoi on a choisi  $R$  telle que  $P(y) \geq 0$  dans la propriété 4.1.2.

On sait désormais construire tous les filtres menant à des bases d'ondelettes régulières, à support compact et tels que (2.13) est vérifié. Mais cette condition (2.13) n'est qu'une conséquence de l'orthonormalité de l'ondelette père  $\varphi$ . Il existe des filtres  $m_0$  vérifiant les conditions du paragraphe précédent menant à des bases d'ondelettes non orthonormées. Nous allons voir quelles sont les conditions à ajouter au filtre  $m_0$  pour obtenir l'orthonormalité.



## 4.2 Conditions d'orthonormalité

On va ici trouver, en partant du filtre  $m_0$  construit dans la section précédente, un candidat pour l'ondelette père  $\varphi$ , puis on vérifiera que ce candidat définit bien une AMR, ce qui nous confirmera l'orthonormalité de la base d'ondelettes.

Supposons que le filtre  $m_0$  est un polynôme trigonométrique engendrant une AMR. Alors par (2.12), pour presque tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Si l'on suppose de plus que l'ondelette père correspondante est intégrable, ie :  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ , alors par continuité de  $\hat{\varphi}$  et de  $m_0$  ( $m_0$  est un polynôme trigonométrique), la relation (2.12) est vraie pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ . D'autre part, pour qu'une ondelette père engendre une AMR, on doit avoir par la remarque (2.2.3) que  $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ . Ce qui entraîne  $\hat{\varphi}(0) = m_0(0)\hat{\varphi}(0)$ , et donc

$$m_0(0) = 1 \tag{4.4}$$

Ces différentes observations nous amènent à poser

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \tag{4.5}$$

Ce produit infini est bien défini :

**Lemme 4.2.1.** *Soit  $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{ik\xi}$  un polynôme trigonométrique tel que  $m_0(0) = 1$ , alors  $\prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$  converge simplement pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  et uniformément sur tout compact.*

*Démonstration.* Puisque  $m_0(0) = 1$ ,  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}$ . Donc

$$\begin{aligned} |m_0(\xi)| &\leq 1 + |m_0(\xi) - 1| \\ &\leq 1 + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi} - \sqrt{2} \right) \right| \\ &\leq 1 + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \right) \right| \\ &\leq 1 + \left| \frac{2i}{\sqrt{2}} e^{-ik\frac{\xi}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \frac{1}{2i} (e^{-ik\frac{\xi}{2}} - e^{ik\frac{\xi}{2}}) \right| \\ &\leq 1 + \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k| \left| \sin\left(\frac{k\xi}{2}\right) \right| \\ &\leq 1 + C \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k| |k| \cdot |\xi| \text{ car } |\sin x| \leq |x| \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ &\leq 1 + C' |\xi|, \text{ le cardinal des } h_k \text{ non nuls étant fini.} \end{aligned}$$

De la même manière on obtient  $|m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)| \leq 1 + C' \frac{|\xi|}{2^j}$ . Puisque  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{|\xi|}{2^j}$  converge, le produit  $\prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$  converge simplement pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ . De plus, sur tout

compact,  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\xi}{2^j}$  converge normalement, ainsi le produit infini du membre de droite de (4.5) uniformément sur tout compact, d'après le théorème 1.3.5.  $\square$

Le raisonnement précédent était basé sur le fait que  $\varphi \in L^1$ . On verra plus loin que pour  $m_0$  vérifiant les conditions du lemme précédent,  $\varphi$  est à support compact. Notre cadre d'étude impose de façon évidente l'appartenance de  $\varphi$  à  $L^2$ , il s'ensuit donc que  $\varphi$  est bien dans  $L^1$ . On a prouvé que la seule ondelette père que l'on peut obtenir à partir d'un filtre  $m_0$  construit comme dans la section précédente est (4.5).

Montrons maintenant que  $\varphi$  définie par (4.5) vérifie les conditions requises pour engendrer une AMR. On prouve d'abord, grâce à un lemme dû à Mallat, que  $\varphi$  appartient bien à  $L^2$ .

**Lemme 4.2.2.** *Si  $m_0$  est  $2\pi$ -périodique et vérifie (2.13), si de plus  $\prod_{j=1}^{\infty} m_0(\frac{\xi}{2^j})$  converge simplement presque partout, alors sa limite  $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\|\varphi\|_{L^2} \leq 1$ .*

*Démonstration.* On commence par définir  $f_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \prod_{j=1}^k m_0(\frac{\xi}{2^j}) \chi_{[-\pi, \pi]}(\frac{\xi}{2^k})$ .

On a par hypothèse que  $f_k(\xi) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \hat{\varphi}(\xi)$  pour presque tout  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Intéressons nous désormais à la norme  $L^2$  des fonctions  $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , ceci à du sens car ces fonctions sont à support compact. On a

$$\int_{\mathbb{R}} |f_k(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2^k} \int_{-2^k \pi}^{2^k \pi} \prod_{j=1}^k |m_0(\frac{\xi}{2^j})|^2 d\xi,$$

car  $-\pi \leq \frac{\xi}{2^k} \leq \pi \Leftrightarrow -\pi 2^k \leq \xi \leq \pi 2^k$ . On effectue ensuite le changement de variable  $\xi = \nu - 2^k \pi$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f_k(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{2^k} \int_0^{2^{k+1} \pi} \prod_{j=1}^k |m_0(\frac{\nu}{2^j} - 2^{k-j})|^2 d\nu \\ &= \frac{1}{2^k} \int_0^{2^{k+1} \pi} \prod_{j=1}^k |m_0(\frac{\xi}{2^j})|^2 d\xi, \end{aligned}$$

par  $2\pi$ -périodicité de la fonction  $m_0$ . On va maintenant séparer l'intégrale en

deux parties puis utiliser le changement de variable  $\xi = \nu + 2^k \pi$  dans la deuxième

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f_k(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2^k \pi} \prod_{j=1}^k |m_0(\frac{\xi}{2^j})|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{2^k \pi}^{2^{k+1} \pi} \prod_{j=1}^k |m_0(\frac{\xi}{2^j})|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2^k \pi} \prod_{j=1}^k |m_0(\frac{\xi}{2^j})|^2 d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2^k \pi} \prod_{j=1}^{k-1} |m_0(\frac{\nu}{2^j} + 2^{k-j} \pi)|^2 |m_0(\frac{\nu}{2^k} + \pi)|^2 d\nu \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2^k \pi} \prod_{j=1}^{k-1} |m_0(\frac{\xi}{2^j})|^2 \left( |m_0(\frac{\xi}{2^k})|^2 + |m_0(\frac{\xi}{2^k} + \pi)|^2 \right) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2^k \pi} \prod_{j=1}^{k-1} |m_0(\frac{\xi}{2^j})|^2 \\
&= \|f_{k-1}\|_2^2,
\end{aligned}$$

où l'on passe de la troisième à la quatrième égalité grâce à (2.13).

On a finalement pour tout  $k \geq 2$ ,  $\|f_k\|_{L^2}^2 = \|f_{k-1}\|_{L^2}^2$ . Donc pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\|f_k\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 = 1.$$

En effet on a

$$\begin{aligned}
\|f_1\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} |m_0(\frac{\xi}{2})|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 |m_0(\xi)|^2 d\xi + \int_0^{\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} |m_0(\xi + \pi)|^2 d\xi + \int_0^{\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (|m_0(\xi + \pi)|^2 + |m_0(\xi)|^2) d\xi \\
&= 1, \text{ par (2.13)}.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Fatou,  $\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_k(\xi)|^2 d\xi \leq 1$ .  
Donc  $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ , et on a  $\|\varphi\|_{L^2} = \|\hat{\varphi}\|_{L^2} \leq 1$   $\square$

Le lemme suivant, dû à Deslauriers et Dubuc, montre que si  $m_0$  est un polynôme trigonométrique, alors  $\varphi$  est à support compact.

**Lemme 4.2.3.** *Si  $\Gamma(\xi) = \sum_{k=N_1}^{N_2} \gamma_k e^{-ik\xi}$  avec  $\sum_{k=N_1}^{N_2} \gamma_k = 1$ , alors  $\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(\frac{\xi}{2^j})$  est une fonction entière de type exponentielle. En particulier, c'est la transformée de Fourier d'une distribution de support inclut dans  $[N_1, N_2]$ .*

*Démonstration.* Notons déjà que le produit infini de l'énoncé est bien défini par le lemme 4.2.1. Si l'on montre que  $\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(\frac{\xi}{2^j})$  est une fonction entière de type exponentiel de bornes

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| \leq C_1(1 + |\xi|)^{M_1} e^{N_1 \operatorname{Im} \xi}, \text{ si } \operatorname{Im} \xi \leq 0,$$

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| \leq C_2(1 + |\xi|)^{M_2} e^{N_2 \operatorname{Im} \xi}, \text{ si } \operatorname{Im} \xi \geq 0,$$

alors par le théorème de Paley-Wiener pour les distributions, on aura que  $\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(\frac{\xi}{2^j})$  est la transformée de Fourier d'une distribution de support inclut dans  $[N_1, N_2]$ . On va donc chercher à montrer l'inégalité

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| \leq C_1(1 + |\xi|)^{M_1} e^{N_1 \operatorname{Im} \xi}, \quad (4.6)$$

l'autre se prouve par un raisonnement analogue. On pose  $\Gamma_1(\xi) = e^{iN_1 \xi} \Gamma(\xi) = \sum_{n=N_1}^{N_2} \gamma_n e^{i\xi(N_1-n)} = \sum_{n=0}^{N_2-N_1} \gamma_{N_1+n} e^{-in\xi}$ . On a donc  $\Gamma(\xi) = e^{-iN_1 \xi} \Gamma_1(\xi)$ . Ainsi  $\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(\frac{\xi}{2^j}) = e^{-iN_1 \xi} \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(\frac{\xi}{2^j})$  et il suffit alors de montrer que

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| \leq C_1(1 + |\xi|)^{M_1}.$$

Pour cela, on va d'abord montrer que pour  $\operatorname{Im} \zeta \leq 0$  on a  $|e^{-in\zeta} - 1| \leq 2 \min(1, n|\zeta|)$ . En effet, si  $n|\zeta| \geq 1$ , alors

$$\begin{aligned} |e^{-in\zeta} - 1| &\leq |e^{-in\zeta}| + 1 \\ &\leq |e^{-in \operatorname{Re}(\zeta)} e^{n \operatorname{Im}(\zeta)}| + 1 \\ &\leq |e^{n \operatorname{Im}(\zeta)}| + 1 \\ &\leq 2, \text{ car } \operatorname{Im} \zeta \leq 0. \end{aligned}$$

Si maintenant  $n|\zeta| < 1$ , alors

$$\begin{aligned} |e^{-in\zeta} - 1| &\leq \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-in\zeta)^k}{k!} \right| \\ &\leq n|\zeta| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(n|\zeta|)^{k-1}}{k!} \\ &\leq n|\zeta| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{k!}, \text{ car } (n|\zeta|)^{k-1} \leq 1 \\ &\leq n|\zeta|(e - 1) \leq 2n|\zeta|. \end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
|\Gamma_1(\zeta) - 1| &\leq \sum_{n=0}^{N_2-N_1} |\gamma_{N_1+n}| |e^{-in\zeta} - 1| \\
&\leq 2 \sum_{n=0}^{N_2-N_1} |\gamma_{N_1+n}| \min(1, n|\zeta|) \\
&\leq C \min(1, |\zeta|)
\end{aligned}$$

Soit  $\xi$  tel que  $\text{Im}\xi \leq 0$ . Si  $|\xi| \leq 1$ , alors

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| &\leq \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{C}{2^j}\right) \\
&\leq \prod_{j=1}^{\infty} e^{\frac{C}{2^j}} \\
&\leq e^C \\
&\leq e^C (1 + |\xi|)^{M_1}
\end{aligned}$$

Si maintenant  $|\xi| \geq 1$ , il existe  $j_0 \geq 0$  tel que  $2^{j_0} \leq |\xi| < 2^{j_0+1}$ . On a

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| &\leq \prod_{j=1}^{j_0+1} (1+C) \left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1\left(\frac{\xi/2^{j_0+1}}{2^j}\right) \right| \\
&\leq (1+C)^{j_0+1} e^C, \text{ car } \frac{|\xi|}{2^{j_0+1}} < 1 \\
&\leq e^C (1+C) e^{j_0 \ln(1+C)} \\
&\leq e^C (1+C) e^{\frac{\ln|\xi|}{\ln 2} \ln(1+C)}, \text{ car } j_0 \leq \frac{\ln|\xi|}{\ln 2} \\
&\leq e^C (1+C) |\xi|^{\frac{\ln(1+C)}{\ln 2}} \\
&\leq C' (1 + |\xi|)^{\frac{\ln(1+C)}{\ln 2}}
\end{aligned}$$

En prenant  $C_1 = \max(e^C, C')$ , on a bien (4.6). □

Nous allons maintenant voir, comme annoncé précédemment, que la condition (2.13) n'implique pas forcément l'orthonormalité des  $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ , donc que le filtre  $m_0$  construit dans la section précédente ne mène pas systématiquement à une ondelette père et donc à une AMR.

*Exemple 4.2.4.* Un contre exemple est le filtre

$$m_0 = \left(\frac{1+e^{-\xi}}{2}\right)(1 - e^{-i\xi} + e^{-2i\xi}) = \frac{1+e^{-3i\xi}}{2} = e^{\frac{-3i\xi}{2}} \cos\left(\frac{3\xi}{2}\right)$$

Ainsi (2.13) est vérifiée. De plus  $m_0(0) = 1$ , donc d'après le lemme 4.2.1, le

produit infini  $\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\frac{\xi}{2^j})$  est bien défini. On a

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\xi) &= e^{-3i\xi \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}}} \prod_{j=1}^{\infty} \cos\left(\frac{3\xi}{2^{j+1}}\right) \\ &= e^{-\frac{3i\xi}{2}} \frac{\sin(3\xi/2)}{3\xi/2}\end{aligned}$$

On a utilisé

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin(\frac{x}{2^n})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}. \quad (4.7)$$

En calculant la transformée de Fourier de la fonction  $g : x \rightarrow \frac{1}{3}\chi_{[0,3]}(x)$ , on voit que  $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{3} \int_0^3 e^{-ix\xi} dx = e^{-\frac{3i\xi}{2}} \frac{\sin(3\xi/2)}{3\xi/2} = \hat{\varphi}(\xi)$ , pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ . Comme  $\hat{\varphi}$  intégrable, on a par transformée de Fourier inverse,  $\varphi(x) = \frac{1}{3}\chi_{[0,3]}(x)$ . Or la famille  $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  n'est pas orthonormée. Ainsi, le filtre  $m_0$  définit dans cet exemple ne permet pas d'engendrer une AMR.

Nous devons donc imposer des conditions supplémentaires sur  $m_0$  pour que  $\varphi$  génère bien une AMR car on aura alors (2.10) (ie.  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$ ). On constate en effet que comme  $m_0(0) = 1$ , on a par définition de  $\varphi$  que  $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ , ce qui prouve que si (2.10) est vérifiée alors les espaces  $V_j = (\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z})$  constituent bien une AMR. Nous aurons alors construit une base d'ondelettes orthonormée à support compact. En effet par (2.21) on a

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k+1} \overline{h_{1-k}} \varphi_{1,k}(x)$$

où les  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  sont les coefficients de  $m_0$  et donc de  $\varphi$ . Le nombre de coefficients étant fini,  $\psi$  formera une base d'ondelette orthonormée à support compact de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Avant d'énoncer les conditions assurant (2.10), remarquons que  $\psi$  définie par (2.21) génère déjà une tight frame.

**Proposition 4.2.5.** *Soit  $m_0$  un polynôme trigonométrique vérifiant (2.13) et tel que  $m_0(0) = 1$ . Soient  $\varphi, \psi$  deux fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  définies par (4.5) et (2.21). On définit de plus, comme d'habitude,  $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$ . Alors, pour toute fonction  $f$  de  $L^2(\mathbb{R})$ ,*

$$\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|_2^2$$

ie :  $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  constitue une tight frame de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Nous aurons besoin dans la preuve de la remarque suivante :

*Remarque 4.2.6.* Si  $m_0(0) = 1$ , alors par (2.13), on a aussi  $m_0(\pi) = 0$ . De plus, pour tout  $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$  il existe  $l \geq 0$  et  $m \in \mathbb{Z}$  tels que

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(2k\pi) &= \hat{\varphi}(22^l(2m+1)\pi) \\ &= \left( \prod_{j=1}^l m_0(2^{l+1-j}(2m+1)\pi) \right) m_0((2m+1)\pi)\hat{\varphi}((2m+1)\pi) \\ &= m_0(\pi)\hat{\varphi}((2m+1)\pi), \text{ par } 2\pi \text{ p\'eriodicit\'e de } m_0 \\ &= 0\end{aligned}$$

L'ondelette p\ere doit, pour d\'efinir une AMR, engendrer un syst\eme orthonorm\'e ; ce qui se traduit, gr\ace \a (2.10), par  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$ . On trouve donc que

$|\hat{\varphi}(0)| = 1$ , c'est \a dire que  $|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx| = 1$ . Il est alors commode de choisir la phase de  $\varphi$  telle que

$$\hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1. \quad (4.8)$$

*D\'emonstration.* On se donne  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Alors  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle|^2$  converge pour tout entier  $j$ . En effet

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle|^2 &\leq 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |\varphi(2^j x - k)| dx \right)^2 \\ &\leq \|f\|_\infty^2 |Supp(f)| 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_{x \in Supp(f)} |\varphi(2^j x - k)|^2 dx \right) \\ &\leq \|f\|_\infty^2 |Supp(f)| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_{y \in 2^j Supp(f)} |\varphi(y - k)|^2 dy \right).\end{aligned}$$

Il existe  $K \in \mathbb{Z}$  tel que  $2^j Supp(f) \cap (2^j Supp(f) + k) = \emptyset$  si  $k \geq K$ . Ainsi, en remarquant que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  il existe  $m, l \in \mathbb{Z}, l < K$  tels que  $k = mK + l$ , on a

$$\begin{aligned}&\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{y \in 2^j Supp(f)} |\varphi(y - k)|^2 dy \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{K-1} \int_{y \in 2^j Supp(f)} |\varphi(y - mK - l)|^2 dy \\ &= \sum_{l=0}^{K-1} \int_{y \in \cup_{m \in \mathbb{Z}} (2^j Supp(f) - mK)} |\varphi(y - l)|^2 dy \\ &\leq \sum_{l=0}^{K-1} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(y - l)|^2 dy \\ &\leq K \|\varphi\|^2 < +\infty,\end{aligned}$$

o\grave{u}  $\cup_{m \in \mathbb{Z}} (2^j Supp(f) - mK)$  est une union disjointe. On prouve de m\eme que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2$  converge pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\varphi_{0,k}(x) = \varphi(x-k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi_{1,n}(x-k) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(2x - 2k - n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi_{1,n+2k}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \varphi_{1,n}(x)$ . Ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi_{0,k} \rangle|^2 &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_{n-2k}} \langle f, \varphi_{1,n} \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \overline{h_{m-2k}} \langle f, \varphi_{1,n} \rangle \langle \varphi_{1,m}, f \rangle. \end{aligned}$$

En se souvenant que  $\psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \overline{h_{1-n}} \varphi_{1,n}$ , on a

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in \mathbb{Z}} (|\langle f, \varphi_{0,k} \rangle|^2 + |\langle f, \psi_{0,k} \rangle|^2) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} (h_{n-2k} \overline{h_{m-2k}} + (-1)^{m+n} \overline{h_{1-n+2k}} h_{1-m+2k}) \langle f, \varphi_{1,n} \rangle \langle \varphi_{1,m}, f \rangle, \end{aligned}$$

où l'on peut intervertir l'ordre de sommation car les séries sont absolument convergentes (il n'y a qu'un nombre fini d'indice  $k$  tels que le coefficient  $h_k$  est non nul). On va maintenant s'intéresser à la quantité

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (h_{n-2k} \overline{h_{m-2k}} + (-1)^{m+n} \overline{h_{1-n+2k}} h_{1-m+2k}) \langle f, \varphi_{1,n} \rangle \langle \varphi_{1,m}, f \rangle$$

selon la parité de  $m$  et  $n$ . Si  $n, m$  sont pairs,  $n = 2r, m = 2s$ , on a

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in \mathbb{Z}} (h_{2r-2k} \overline{h_{2s-2k}} + \overline{h_{1-2r+2k}} h_{1-2s+2k}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2r-2k} \overline{h_{2s-2k}} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{h_{1-2l+2s}} h_{1-2l+2r}, \text{ avec } k = s + r - l \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2r-k} \overline{h_{2s-k}} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_{k+2(s-r)}} \\ &= \delta_{r,s} = \delta_{n,m}, \end{aligned}$$

par (2.19). De même, on a pour  $n = 2r + 1$  et  $m = 2s + 1$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (h_{2r+1-2k} \overline{h_{2s+1-2k}} + \overline{h_{-2r+2k}} h_{-2s+2k}) = \delta_{r,s} = \delta_{n,m}.$$

Si maintenant  $n = 2r$  est pair et  $m = 2s + 1$  est impair, alors

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in \mathbb{Z}} (h_{2r-2k} \overline{h_{2s+1-2k}} - \overline{h_{1-2r+2k}} h_{2s+2k}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2r-2k} \overline{h_{2s-2k}} - \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{h_{1+2s-2l}} h_{2r-2l}, l = s + r - k \\ &= 0 = \delta_{n,m}. \end{aligned}$$



On a ainsi, pour tout  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (h_{n-2k} \overline{h_{m-2k}} + (-1)^{m+n} \overline{h_{1-n+2k}} h_{1-m+2k}) = \delta_{n,m},$$

et donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (|\langle f, \varphi_{0,k} \rangle|^2 + |\langle f, \psi_{0,k} \rangle|^2) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{1,m} \rangle|^2,$$

ou encore

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{0,k} \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{1,k} \rangle|^2 - \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{0,k} \rangle|^2.$$

On établit par récurrence que pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{j+1,k} \rangle|^2 - \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle|^2.$$

D'où pour tout  $J \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{j=-J}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{J,k} \rangle|^2 - \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{-J,k} \rangle|^2 \quad (4.9)$$

Comme  $f$  continue à support compact, en reprenant la preuve de la proposition 2.2.1, on obtient que pour tout  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit, il existe  $J_0 \in \mathbb{N}$  (dépendant de  $f$  et  $\varepsilon$ ) suffisamment grand tel que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{-j,k} \rangle|^2 < \varepsilon, \forall j \geq J_0. \quad (4.10)$$

En reprenant maintenant la preuve de la proposition 2.2.2, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{J,k} \rangle|^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2^J})|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + R_J(f)$$

où  $|R_J(f)| \leq C2^{-j}$ . On a donc  $|R_J(f)| \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$ . La fonction  $\varphi$  est  $L^2$  à support compact, donc  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ , et donc  $\hat{\varphi}$  est continue. De plus, d'après (4.8),  $\hat{\varphi}(0) = 1$ , ainsi

$$|\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2^j})| |\hat{f}(\xi)| \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} |\hat{f}(\xi)|^2.$$

La fonction  $\xi \rightarrow |\hat{f}(\xi)|^2$  est intégrable (car  $f$  continue à support compact, donc  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , donc  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ ). On peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2^J})|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Par (4.9), on a donc, pour tout  $f$  à support compact,

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 &= \lim_{J \rightarrow +\infty} \sum_{j=-J}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \\
&= \lim_{J \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{J,k} \rangle|^2 - \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{-J,k} \rangle|^2 \right) \\
&= \lim_{J \rightarrow +\infty} \left( 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2^J})|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + R_J(f) \right) \\
&= \|f\|_2^2 + \lim_{J \rightarrow +\infty} R_J(f) \\
&= \|f\|_2^2
\end{aligned}$$

où l'on passe de la ligne 2 à la ligne 3 car  $\lim_{J \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{-j,k} \rangle|^2 = 0$ .

Cette relation est donc vraie pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$  par densité des fonctions continues à support compact dans  $L^2(\mathbb{R})$ .  $\square$

*Remarque 4.2.7.* Jusqu'à la fin de ce chapitre on désignera par

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{ik\xi}$$

les polynômes trigonométriques vérifiant (2.13) ainsi que (4.4), et tels qu'il existe un autre polynôme trigonométrique  $\mathcal{L}$  tel que

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{i\xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi), N \geq 1.$$

Les résultats qui suivent sont issues de [2].

Pour que la base d'ondelette issue du filtre soit bien orthonormale, il suffit que ce dernier, en plus de respecter l'ensemble des conditions de la remarque 4.2.7, soit borné par une constante dépendant de  $N$ . Plus précisément, on veut

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\mathcal{L}(\xi)| = B < 2^{N-\frac{1}{2}}. \quad (4.11)$$

**Lemme 4.2.8.** *Soit  $m_0$  comme dans la remarque 4.2.7. Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,*

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| \leq C(1 + |\xi|)^{-N + \frac{\log B}{\log 2}} \quad (4.12)$$

où  $B = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\mathcal{L}(\xi)|$ .

*Démonstration.* On rappelle (4.7) :  $\prod_{j=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^j}\right) = \frac{\sin x}{x}$ , on a ainsi

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) &= \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 + e^{i\frac{\xi}{2^j}}}{2}\right)^N \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{\infty} \left(e^{i\frac{\xi}{2^{j+1}}} \frac{e^{-i\frac{\xi}{2^{j+1}}} + e^{i\frac{\xi}{2^{j+1}}}}{2}\right)^N \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \\
&= \left(e^{i\xi \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}}}\right)^N \prod_{j=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\xi}{2^{j+1}}\right)^N \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \\
&= e^{i\frac{N\xi}{2}} \left(\frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}}\right)^N \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\xi}{2^j}\right),
\end{aligned}$$

avec le membre de droite convergeant uniformément sur tout compact par le lemme 4.2.1 ( $\mathcal{L}$  polynôme trigonométrique vérifiant  $\mathcal{L}(0) = 1$ ). Si  $-N + \frac{\log B}{\log 2} < 0$ , il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que pour tout  $|\xi| \leq 1$ ,

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\right| &\leq C_1 \\
&\leq C_1 2^{N - \frac{\log B}{\log 2}} (1 + |\xi|)^{-N + \frac{\log B}{\log 2}}, \text{ car } 1 + |\xi| \leq 2 \\
&\leq C'_1 (1 + |\xi|)^{-N + \frac{\log B}{\log 2}}
\end{aligned}$$

Si  $-N + \frac{\log B}{\log 2} \geq 0$ , il est immédiat que  $\left|\prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\right| \leq C'_1 (1 + |\xi|)^{-N + \frac{\log B}{\log 2}}$ .

Intéressons nous maintenant aux  $|\xi| > 1$ . Pour  $|\xi| > 1$  fixé, on appelle  $j_0 \in \mathbb{N}$  l'entier tel que

$$2^{-j_0} |\xi| < 1 \leq 2^{-j_0+1} |\xi|$$

Ce qui entraine

$$\frac{\log |\xi|}{\log 2} < j_0 \leq \frac{\log |\xi|}{\log 2} + 1$$

Remarquons aussi que  $m_0(0) = \mathcal{L}(0) = 1$ , donc  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j = 1$ . En utilisant des arguments similaires à ceux du lemme 4.2.1, on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(\xi)| &= \left|1 + \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j e^{ij\xi} - \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j\right| \\
&= \left|1 + \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j (e^{ij\xi} - 1)\right| \\
&\leq 1 + 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |f_j| \left|\sin \frac{j\xi}{2}\right| \\
&\leq e^{C_2 |\xi|}.
\end{aligned}$$

Ainsi, comme  $\frac{|\xi|}{2^{j_0}} < 1$ ,

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| &= \left| \prod_{j=1}^{j_0} \mathcal{L}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\xi}{2^{j_0} 2^j}\right) \right| \\
&\leq B^{j_0} \prod_{j=1}^{\infty} e^{C_2 \left| \frac{\xi}{2^{j_0} 2^j} \right|} \\
&\leq e^{j_0 \log B} e^{C_2 \frac{|\xi|}{2^{j_0}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}} \\
&\leq e^{(\frac{\log |\xi|}{\log 2} + 1) \log B} e^{C_2 \frac{|\xi|}{2^{j_0}}}, \text{ car } j_0 \leq \frac{\log |\xi|}{\log 2} + 1 \\
&\leq e^{(\frac{\log |\xi|}{\log 2} + 1) \log B} e^{C_2} \\
&\leq C_3 e^{\log B \frac{\log |\xi|}{\log 2}} = C_3 |\xi|^{\frac{\log B}{\log 2}}.
\end{aligned}$$

Donc pour tout  $|\xi| > 1$ ,

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| &= \left| e^{i \frac{N\xi}{2}} \left( \frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}} \right)^N \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| \\
&\leq 2^N |\xi|^{-N} C_3 |\xi|^{\frac{\log B}{\log 2}} \\
&\leq C_4 |\xi|^{-N + \frac{\log B}{\log 2}} \\
&\leq C_4 2^{N - \frac{\log B}{\log 2}} (1 + |\xi|)^{-N + \frac{\log B}{\log 2}}, \text{ car } 1 + |\xi| \leq 2|\xi| \\
&\leq C_5 (1 + |\xi|)^{-N + \frac{\log B}{\log 2}}
\end{aligned}$$

où l'on a supposé à la fin que  $-N + \frac{\log B}{\log 2} < 0$ . Si au contraire  $-N + \frac{\log B}{\log 2} \geq 0$ , il est immédiat que

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| \leq C_5 (1 + |\xi|)^{-N + \frac{\log B}{\log 2}}.$$

Finalement, en prenant  $C = \max(C'_1, C_5)$ , on a pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| \leq C (1 + |\xi|)^{-N + \frac{\log B}{\log 2}}.$$

□

*Remarque 4.2.9.* Si  $B < 2^{N-1}$ , alors  $\left| \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| \leq C (1 + |\xi|)^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 1$  et la fonction  $\eta_{\infty}$  vérifiant  $\widehat{\eta_{\infty}}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$  est alors continue ( $\widehat{\eta_{\infty}}$  est intégrable donc sa transformée de Fourier  $\eta_{\infty}$  est continue).

**Proposition 4.2.10.** *Soit  $m_0$  comme dans la remarque (4.2.7) et vérifiant de plus (4.11). Alors les fonctions  $\eta_l$  définies par  $\eta_l(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \eta_{l-1}(2x -$*

$k$ ),  $\eta_0 = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[}$  convergent en norme  $L^2$  vers la fonction continue  $\eta_\infty$  vérifiant  $\widehat{\eta}_\infty(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\frac{\xi}{2^j})$ .

*Démonstration.* Pour  $\xi \neq 0$ ,  $\widehat{\eta}_0(\xi) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-ix\xi} dx = \frac{\sin(\frac{\xi}{2})}{\frac{\xi}{2}}$ . De plus, on a  $\widehat{\eta}_0(0) = 1$ .

Supposons par récurrence que pour tout  $m \leq l-1$ ,  $\widehat{\eta}_m(\xi) = \left( \prod_{j=1}^m m_0(\frac{\xi}{2^j}) \right) \frac{\sin(\frac{\xi}{2^{m+1}})}{\frac{\xi}{2^{m+1}}}$ .

On a alors pour  $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned} \widehat{\eta}_l(x) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \widehat{\eta}_{l-1}(2x - k)(\xi) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\frac{\xi}{2}} \right) \widehat{\eta}_{l-1}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\frac{\xi}{2}} \right) \prod_{j=1}^{l-1} m_0\left(\frac{\xi}{2^{j+1}}\right) \frac{\sin(\frac{\xi/2}{2^l})}{\frac{\xi/2}{2^l}} \\ &= m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \left( \prod_{j=1}^{l-1} m_0\left(\frac{\xi}{2^{j+1}}\right) \right) \frac{\sin(\frac{\xi/2}{2^l})}{\frac{\xi/2}{2^l}} \\ &= \left( \prod_{j=1}^l m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right) \frac{\sin(\frac{\xi}{2^{l+1}})}{\frac{\xi}{2^{l+1}}} \end{aligned}$$

On obtient alors que, pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , pour tout  $\xi \neq 0$ ,

$$\widehat{\eta}_l(\xi) = \left( \prod_{j=1}^l m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right) \left( \frac{\sin(\frac{\xi}{2^{l+1}})}{\frac{\xi}{2^{l+1}}} \right),$$

et  $\widehat{\eta}_l(0) = 1$ . Par le lemme (4.2.1), on obtient que  $\widehat{\eta}_l$  converge uniformément vers  $\widehat{\eta}_\infty$  sur tout compact. Sur un compact, la convergence uniforme implique la convergence  $L^2$  et donc, pour tout  $\delta > 0$ , et pour tout  $R > 0$ , il existe  $l_0 > 0$  tel que, pour tout  $l \geq l_0$ ,

$$\int_{|\xi| \leq R} |\widehat{\eta}_l(\xi) - \widehat{\eta}_\infty(\xi)|^2 d\xi \leq \delta$$

D'autre part, le lemme (4.2.2) donne que  $\widehat{\eta}_\infty \in L^2(\mathbb{R})$ . Donc pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $R > 0$  tel que

$$\int_{|\xi| \geq R} |\widehat{\eta}_\infty(\xi)|^2 d\xi \leq \delta.$$

Si l'on arrive à montrer que  $\widehat{\eta}_l$  converge en norme  $L^2$  vers  $\widehat{\eta}_\infty$ , on aura la convergence  $L^2$  de  $\eta_l$  vers  $\eta_\infty$ . Il reste donc à montrer que pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $R$  et  $l_0$  suffisamment grands pour que pour tout  $l \geq l_0$ ,

$$\int_{|\xi| \geq R} |\widehat{\eta}_l(\xi)|^2 d\xi \leq \delta \quad (4.13)$$

En effet, on aura alors

$$\begin{aligned}
& \int_{|\xi| \geq R} |\widehat{\eta}_l(\xi) - \widehat{\eta}_\infty(\xi)|^2 d\xi \\
& \leq \int_{|\xi| \geq R} (|\widehat{\eta}_l(\xi)|^2 + 2|\widehat{\eta}_l(\xi)||\widehat{\eta}_\infty(\xi)| + |\widehat{\eta}_\infty(\xi)|^2) d\xi \\
& \leq \int_{|\xi| \geq R} |\widehat{\eta}_l(\xi)|^2 d\xi + 2 \int_{|\xi| \geq R} |\widehat{\eta}_l(\xi)|^2 d\xi \int_{|\xi| \geq R} |\widehat{\eta}_\infty(\xi)|^2 d\xi + \delta \text{ par Cauchy Schwarz} \\
& \leq (1 + 2\delta) \int_{|\xi| \geq R} |\widehat{\eta}_l(\xi)|^2 d\xi + \delta \\
& \leq (1 + 2\delta)\delta + \delta
\end{aligned}$$

Évaluer (4.13) revient en fait à évaluer l'intégrale

$$\int_{|\xi| \geq R} |P_l(\xi)|^2 \left| \frac{\sin(2^{-l-1}\xi)}{2^{-l-1}\xi} \right|^2 d\xi,$$

où  $P_l(\xi) = \prod_{j=1}^l m_0(\frac{\xi}{2^j})$ . On va calculer cette intégrale d'abord sur  $R \leq |\xi| \leq 2^l\pi$  puis sur  $|\xi| \geq 2^l\pi$ . Pour cela nous aurons besoin de certaines propriétés vérifiées par  $P_l$  :

- (i)  $|P_l(\xi)|^2 \leq 1$  (en effet  $|m_0(\xi)| \leq 1$ ),
- (ii)  $|P_l(\xi)|^2 \leq \left( \prod_{j=1}^l |\cos(\frac{\xi}{2^j})| \right)^{2N} \prod_{j=1}^l |\mathcal{L}(\frac{\xi}{2^j})|^2 \leq C^2 \left| \frac{2^{-l} \sin(\frac{\xi}{2})}{\sin(2^{-l-1}\xi)} \right|^{2N} (1 + |\xi|)^{2\beta}$ , avec  $\beta = \log(B)/\log(2)$ . Cette propriété des  $P_l$  se justifie à l'aide d'arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du lemme (4.2.8).
- (iii)  $P_l$  est périodique de période  $2^{l+1}\pi$ .

Concentrons-nous d'abord sur le cas  $|\xi| \geq 2^l\pi$ . Par (iii) on a

$$\begin{aligned}
& \int_{|\xi| \geq 2^l\pi} |P_l(\xi)|^2 \left| \frac{\sin(2^{-l-1}\xi)}{2^{-l-1}\xi} \right|^2 d\xi \\
& = \sum_{k \neq 0} \int_{-2^l\pi + 2^{l+1}k\pi}^{2^l\pi + 2^{l+1}k\pi} |P_l(\xi)|^2 \left| \frac{\sin(2^{-l-1}\xi)}{2^{-l-1}\xi} \right|^2 d\xi \\
& = \sum_{k \neq 0} \int_{-2^l\pi}^{2^l\pi} |P_l(\xi)|^2 \left| \frac{\sin(2^{-l-1}\xi)}{2^{-l-1}\xi + k\pi} \right|^2 d\xi \\
& = C \int_{|\xi| \leq 2^l\pi} |P_l(\xi)|^2 |\sin(2^{-l-1}\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

On pose  $\lambda = 2^{-\alpha l}$ , avec  $\alpha \in ]0, 1[$  un réel qui sera déterminé plus tard. Alors

$$\begin{aligned}
& \int_{|\xi| \leq 2^l\pi} |P_l(\xi)|^2 |\sin(2^{-l-1}\xi)|^2 d\xi \\
& \leq \int_{|\xi| \leq 2^l\lambda} |P_l(\xi)|^2 |2^{-l-1}\xi|^2 d\xi + \int_{2^l\lambda \leq |\xi| \leq 2^l\pi} |P_l(\xi)|^2 d\xi \\
& \leq \frac{1}{4} \lambda^2 \int_{|\xi| \leq 2^l\lambda} |P_l(\xi)|^2 d\xi + \int_{2^l\lambda \leq |\xi| \leq 2^l\pi} |P_l(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

Majorons maintenant  $\int_{|\xi| \leq 2^l \lambda} |P_l(\xi)|^2 d\xi$ ,

$$\begin{aligned}
& \int_{|\xi| \leq 2^l \lambda} |P_l(\xi)|^2 d\xi \\
& \leq \int_{|\xi| \leq 1} |P_l(\xi)|^2 d\xi + C^2 \int_{1 \leq |\xi| \leq 2^l \lambda} \left| \frac{2^{-l} \sin(\frac{\xi}{2})}{\sin(2^{-l-1}\xi)} \right|^{2N} (1 + |\xi|)^{2\beta} d\xi \text{ par (ii),} \\
& \leq 2 + C^2 \int_{1 \leq |\xi| \leq 2^l \lambda} |2^l \sin(2^{-l-1}\xi)|^{-2N} (1 + |\xi|)^{2\beta} d\xi \text{ par (i),} \\
& \leq 2 + C^2 2^{-2lN} \int_{1 \leq |\xi| \leq 2^l \lambda} \left| \frac{\xi}{2^{l+1}} \right|^{-2N} (1 + |\xi|)^{2\beta} d\xi \text{ car } \frac{\xi}{2^{l+1}} \leq \frac{2^l \lambda}{2^{l+1}} \leq \frac{1}{2^{\alpha l+1}} \leq \pi \\
& \leq C' 2^{2N} \int_1^\infty (1+x)^{2\beta} x^{-2N} dx = C_1, \text{ avec } C_1 \text{ finie car } 2N - 2\beta > 1.
\end{aligned}$$

Le passage à la dernière ligne est justifié par le fait que

$$\sin|x| \geq \frac{2|x|}{\pi} \text{ si } |x| \leq \pi. \quad (4.14)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
& \int_{2^l \lambda \leq |\xi| \leq 2^l \pi} |P_l(\xi)|^2 d\xi \\
& \leq C^2 2^{-2lN} \int_{2^l \lambda \leq |\xi| \leq 2^l \pi} |\sin(2^{-l-1}\xi)|^{-2N} (1 + |\xi|)^{2\beta} d\xi \\
& \leq C'' 2^{-2lN} 2^l \int_\lambda^\pi |\sin(x/2)|^{-2N} (1 + |2^l x|)^{2\beta} dx, \text{ avec } \frac{\xi}{2^l} = x \\
& \leq C'' 2^{-2lN+l} (1 + |2^l \pi|)^{2\beta} \int_\lambda^\pi |\sin(x/2)|^{-2N} dx \\
& \leq C'' 2^{-2lN+l} (1 + 2^l \pi)^{2\beta} \pi^{2N} \int_\lambda^\pi |x|^{-2N} dx, \text{ par (4.14)} \\
& \leq C'' 2^{-2lN+l} (2^l(2^{-l} + \pi))^{2\beta} \lambda^{-2N} \left( \frac{\pi \lambda^{2N} - \pi^{2N} \lambda}{1 - 2N} \right) \\
& \leq C_2 2^{2l(-N+1+\beta)} \lambda^{-2N}.
\end{aligned}$$

Où  $\left| \frac{\pi \lambda^{2N} - \pi^{2N} \lambda}{1 - 2N} \right| \leq \frac{|\pi \lambda^{2N}| + |\pi^{2N} \lambda|}{|1 - 2N|} \leq K$ ,  $K$  constante. On peut maintenant choisir  $\alpha = \frac{N-\beta-1}{N+2}$  avec  $\alpha \in ]0, 1[$  car  $\beta = \log B / \log 2 < N - \frac{1}{2}$ . Et ainsi,

$$\begin{aligned}
& \int_{|\xi| \leq 2^l \pi} |P_l(\xi)|^2 |\sin(2^{-l-1}\xi)|^2 d\xi \\
& \leq \frac{\lambda^2}{4} C_1 + C_2 2^{2l(-N+1+\beta)} 2^{\alpha l N} \\
& \leq \frac{2^{-2\alpha l}}{4} C_1 + C_2 2^{2l(-N+1+\beta + \frac{N(N-\beta-1)}{N+2})} \\
& \leq \frac{C_1}{4} 2^{-2l \frac{N-\beta-1}{N+2}} + C_2 2^{-2l \frac{2(N-\beta-1)}{N+2}} \\
& \leq C_3 2^{-2l \frac{N-\beta-1}{N+2}}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre clairement que  $\int_{|\xi| \leq 2^l \pi} |P_l(\xi)|^2 |\sin(2^{-l-1}\xi)|^2 d\xi \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0$ . Il reste à évaluer l'intégrale de  $|\widehat{\eta}_l|^2$  sur  $R \leq |\xi| \leq 2^l \pi$ . on a

$$\begin{aligned}
& \int_{R \leq |\xi| \leq 2^l \pi} |P_l(\xi)|^2 \left| \frac{\sin(2^{-l-1}\xi)}{2^{-l-1}\xi} \right|^2 d\xi \\
& \leq C^2 \int_{R \leq |\xi| \leq 2^l \pi} \left| \frac{2^{-l} \sin(\frac{\xi}{2})}{\sin(2^{-l-1}\xi)} \right|^{2N} (1 + |\xi|)^{2\beta} \left| \frac{\sin(2^{-l-1}\xi)}{2^{-l-1}\xi} \right|^2 d\xi \\
& \leq C^2 \int_{R \leq |\xi| \leq 2^l \pi} 2^{-2Nl} \left| \sin(\frac{\xi}{2}) \right|^{2N} (1 + |\xi|)^{2\beta} \left| \frac{1}{\sin(2^{-l-1}\xi)} \right|^{2N} \left| \frac{\sin(2^{-l-1}\xi)}{2^{-l-1}\xi} \right|^2 d\xi \\
& \leq 4C^2 \int_{R \leq |\xi| \leq 2^l \pi} \left| \sin(\frac{\xi}{2}) \right|^{2N} |\xi|^{-2} (1 + |\xi|)^{2\beta} \left| \frac{2^{-l}}{\sin(2^{-l-1}\xi)} \right|^{2N-2} d\xi \\
& \leq 4C^2 \int_{R \leq |\xi| \leq 2^l \pi} |\xi|^{-2} (1 + |\xi|)^{2\beta} 2^{-2(N-2)l} \left( \frac{\pi}{|2^{-l-1}\xi|} \right)^{2N-2} d\xi, \text{ par (4.14)} \\
& \leq 4C^2 \pi^{2N-2} \int_R^\infty (1+x)^{2\beta} x^{-2N} dx.
\end{aligned}$$

Puisque  $2N - 2\beta > 1$ , cette quantité tend vers zéro uniformément en  $l$  lorsque  $R \rightarrow +\infty$ . Ce qui prouve que pour tout  $\delta > 0$ , on peut trouver  $l$  et  $R$  suffisamment grands tels que  $\int_{|\xi| \geq R} |\widehat{\eta}_l(\xi)|^2 d\xi < \delta$ . Ce qui revient, comme on l'a vu précédemment, à prouver que  $\|\widehat{\eta}_l - \widehat{\eta}_\infty\|_{L^2} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0$ .  $\square$

Montrons maintenant que l'ondelette père issue du filtre engendre bien une AMR.

**Proposition 4.2.11.** *Soit  $m_0$  comme dans la remarque 4.2.7 et vérifiant de plus (4.11). Soit de plus  $\varphi$  défini par (2.17) et tel que (4.5). Alors pour tout  $j, k, k' \in \mathbb{Z}$ ,*

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,k'} \rangle = \delta_{k,k'}$$

*Démonstration.* On définit les fonctions  $\eta_l$  comme dans la proposition précédente :

$$\eta_l = T^l \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \text{, où } (Tf)(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n f(2x - n)$$

Pour des raisons qui deviendront évidentes par la suite, on ajoute un indice à  $\eta_l$  :  $\eta_{l,0} = \eta_l$ , et pour  $k \in \mathbb{Z}$ , on définit

$$\eta_{l,k} = (T_k)^l \chi_{[-\frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}+k]} \text{, où } (T_k f)(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n f(2x - n - k)$$

Par récurrence, on obtient directement que  $\eta_{l,k}$  est le translaté de  $\eta_{l,0}$  :  $\eta_{0,k}(x) = \chi_{[-\frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}+k]}(x) = \eta_{0,0}(x - k)$ ,

$$\begin{aligned}
\eta_{l,k} &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \eta_{l-1,k}(2x - n - k) \\
&= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \eta_{l-1,0}(2x - n - 2k), \text{ par récurrence} \\
&= \eta_{l,0}(x - k)
\end{aligned}$$



On a vu dans la proposition précédente que  $\|\eta_{l,0} - \varphi\|_{L^2} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0$ . Un simple changement de variable nous donne que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\|\eta_{l,k} - \varphi\|_{L^2} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0$$

Montrons maintenant par récurrence que, pour  $l \in \mathbb{Z}$  fixé, la famille  $(\eta_{l,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée. Par invariance de la translation, il suffit de voir que  $\langle \eta_{l,k}, \eta_{l,0} \rangle = \delta_{k,0}$ . On a déjà  $\langle \eta_{0,k}, \eta_{0,0} \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \chi_{[-\frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}+k]}(x) dx = \delta_{k,0}$ . Supposons que  $\langle \eta_{l-1,k}, \eta_{l-1,0} \rangle = \delta_{k,0}$ , alors

$$\begin{aligned} \langle \eta_{l,k}, \eta_{l,0} \rangle &= 2 \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} h_n h_m \int_{\mathbb{R}} \eta_{l-1,k}(2x - n - k) \eta_{l-1,0}(2x - m) dx \\ &= 2 \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} h_n h_m \int_{\mathbb{R}} \eta_{l-1,2k+n-m}(2x) \eta_{l-1,0}(2x) dx \\ &= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} h_n h_m \delta_{2k+n-m,0} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n h_{n+2k} \\ &= \delta_{k,0}, \text{ par (2.19)} \end{aligned}$$

On a bien  $\langle \eta_{l,k}, \eta_{l,k'} \rangle = \delta_{k,k'}$  pour tout  $l, k, k' \in \mathbb{Z}$ . Ce qui entraîne immédiatement l'orthonormalité de la famille  $(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,k'} \rangle &= 2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^j x - k) \overline{\varphi(2^j x - k')} dx \\ &= 2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\varphi(x - k' + k)} dx \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} \langle \eta_{l,0}, \eta_{l,k'-k} \rangle = \delta_{k,k'} \end{aligned}$$

□

Résumons les résultats obtenus ce chapitre en un théorème.

**Théorème 4.2.12.** Soit  $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{ik\xi}$  un polynôme trigonométrique vérifiant (2.13),  $m_0(0) = 1$  et tel que  $m_0(\xi) = \left(\frac{1+e^{i\xi}}{2}\right)^N \mathcal{L}(\xi)$ , avec  $N \geq 1$  et  $\mathcal{L}$  un polynôme trigonométrique tel que  $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\mathcal{L}(\xi)| = B < 2^{N-\frac{1}{2}}$ . Alors, en posant

$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$ , on a que la fonction  $\psi$  définie par

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k+1} \overline{h_{1-k}} \varphi_{1,k}(x)$$

engendre une base d'ondelette orthonormée à support compact de  $L^2(\mathbb{R})$ .

### 4.3 Ondelettes de Daubechies

Dans cette section nous allons expliciter la construction de ondelettes de Daubechies les moins régulières. On va prendre le filtre comme dans la remarque 4.2.7 avec  $N = 2$ . On a

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^2 \mathcal{L}(\xi).$$

On cherche dans un premier temps à déterminer  $\mathcal{L}$ . Remarquons que d'après la remarque 4.2.7,  $m_0$  vérifie (2.13) donc, d'après le théorème 4.1.2, le polynôme  $L(\xi) = |\mathcal{L}(\xi)|^2$  s'écrit  $L(\xi) = P(\sin^2(\frac{\xi}{2})) = P(\frac{1-\cos(\xi)}{2})$ . Avec  $P(y) = P_N(y) + y^N R(\frac{1}{2}-y)$ , où  $P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k$  et  $R$  est une fonction polynôme impaire telle que  $P(y) \geq 0, \forall y \in [0, 1]$ . On va prendre  $R \equiv 0$ . Et donc, pour  $N = 2$ , on a  $P(x) = 2x + 1$ . On va utiliser le lemme 4.1.3 pour déterminer  $\mathcal{L}$ . On commence par écrire  $L(\xi)$  sous la forme  $p_L(\cos(\xi))$ . On a

$$\begin{aligned} L(\xi) &= P\left(\frac{1 - \cos(\xi)}{2}\right) \\ &= 1 + 2\frac{1 - \cos(\xi)}{2} = 2 - \cos(\xi). \end{aligned}$$

Ainsi  $p_L(c) = -(c-2)$ . On étudie ensuite les racines du polynôme  $\frac{1}{2} - 2z + \frac{z^2}{2}$ . La racine de  $p_L$ , 2, étant réelle et de module supérieur ou égale à 1, on trouve deux racines réelles  $r = 2 + \sqrt{3}$  et  $\frac{1}{r}$ . On trouve  $\mathcal{L}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{r}} (e^{-i\xi} - r)$ . Une autre possibilité pour  $\mathcal{L}$  est  $\mathcal{L}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{r}} (r - e^{-i\xi})$  On a ainsi

$$\mathcal{L}(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2r}} e^{-i\xi} + \sqrt{\frac{r}{2}}$$

En écrivant  $\mathcal{L}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} l_k e^{-ik\xi}$ , on a  $l_0 = 1.93185165258$  et  $l_1 = -0.517638090205$ .

On peut désormais déterminer les coefficients  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  du filtre.

$$\begin{aligned} m_0(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^2 (l_0 + l_1 e^{-i\xi}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{4} (l_0 + (2l_0 + l_1) e^{-i\xi} + (l_0 + 2l_1) e^{-2i\xi} + l_1 e^{-3i\xi}) \end{aligned}$$

En écrivant  $m_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi}$ , on trouve

$k$	$h_k$
0	0.482962913145
1	0.836516303739
2	0.224143868043
3	-0.129409522551

Pour conclure ce chapitre, on donne un algorithme permettant de calculer les coefficient de  $\mathcal{L}$ . Il est probable que les résultats fournis par cet algorithme

différent d'un signe des tables des coefficients données dans la littérature : la factorisation spectrale de  $L$  n'est pas unique.

```

from sympy import *
x=symbols('x', real = true)

def P_N (N):
    P=0
    for k in range (0,N):
        P= P+binomial (N+k-1,k)*x**k
    return P

def P_cos(P):
    return P.subs(x,(1-x)/2)

def Daubechies(N):
    P = expand(P_cos(P_N(N)))
    return P

def calc (P,N):
    r = roots(P, multiple = true)
    l = len(r)
    B = sqrt(LC(P)/2.)*2**((3-N)/2.)
    c = []
    for i in range (0,l):
        if im(r[i])==0 :
            ri=float(r[i])
            zero = roots(1 - 2*ri* x + x**2,x,multiple=true)
            if abs(r[i]) >= 1:
                if abs(zero[0]) < abs(zero[1]):
                    zer = zero[1]
                else:
                    zer = zero[0]
                B = B*sqrt(1/abs(zer))*(x-zer)
            else:
                a = arg(zero[0])
                B=B*(x**2 - 2*x*cos(a)+1)
        else:
            t=0
            for j in range(0,len(c)):
                if re(r[i]) == re(c[j]):
                    t=1
            if t==0:
                zero = roots(1 - 2*r[i] *x + x**2,x,multiple=true)
                c.append(r[i])
                if abs(zero[0].evalf())>abs(zero[1].evalf()):
                    zj=zero[0].evalf()
                else:
                    zj=zero[1].evalf()
                B=B*1/(abs(zj))*(x**2 - 2*x*re(zj) + abs(zj)**2)

```

```

return B

def Daub(N):
    return expand(calc((P_cos(P_N(N))),N))

On obtient alors

>>> Daub(2)
0.517638090205042*I*x - 1.93185165257814*I
>>> Daub(3)
0.281810335085676*x**2 - 1.52896119631324*x + 2.66136442360066
>>> Daub(4)
0.169558428561105*I*x**3 - 1.20436190091458*I*x**2 +
3.30663492292273*I*x - 3.68604501294234*I
>>> Daub(5)
0.110529921462397*x**4 - 0.969515329573922*x**3 +
3.47447048698616*x**2 - 6.31915743565755*x + 4.947755257259

```

On peut comparer ces résultats à ceux obtenus dans [3].

$N = 2$	1.93185165258 - 0.517638090205
$N = 3$	2.6613644236 - 1.52896119631 0.281810335086
$N = 4$	3.68604501294 - 3.30663492292 1.20436190091 - 0.169558428561
$N = 5$	5.12327673517 - 6.29384704236 3.41434077007 - 0.936300109646 0.106743209135

FIGURE 4.1 – Coefficients de  $\mathcal{L}$ .

# Conclusion

L'objectif de ce travail était la construction des ondelettes à support compact de Daubechies. En poursuivant cet objectif d'autres développements intéressants sur cette théorie ont été mis de côté tels que les ondelettes de Meyer (qui sont  $C^\infty$  et décroissent plus vite que n'importe quel inverse de polynôme) ou de Battle-Lemarié (de régularité pouvant être  $C^k$  pour n'importe quel entier  $k$  et dont la décroissance est toujours exponentielle, seul le coefficient de décroissance augmentant quand  $k$  augmente). Plus généralement la régularité des ondelettes et le rapport qu'elle entretient avec leurs décroissance est une question passionnante qui a été traitée rapidement dans ce mémoire, l'étude de la régularité des ondelettes de Daubechies aurait par exemple pu constituer un chapitre supplémentaire. Un autre aspect cette théorie a été totalement passé sous silence : la transformée d'ondelette continue. Cette transformée, peu adaptée pour la compression à cause de la redondance des coefficients, est pourtant très utilisée en analyse des signaux.

Évoquons pour finir l'émergence de nouveaux outils en traitement du signal directement inspirés des ondelettes : d'une part les paquets d'ondelettes et de l'autre l'ondelette de Malvar. Ces outils ont été conçu pour l'analyse de signaux quasi-stationnaires, en effet on disposait des ondelettes 'classiques', qui conviennent très bien aux signaux non stationnaires comportant des pics et des discontinuités, et de l'analyse de Fourier traditionnelle, parfaite pour étudier les signaux périodiques et réguliers. Ces deux méthodes ne sont pas optimales pour les signaux dont le comportement est prévisible sur certains intervalles de temps tels la parole ou la musique. Les paquets d'ondelettes et l'ondelette de Malvar sont en fait des systèmes hybrides, entre une transformée de Fourier et une ondelette. Le premier s'inspire de la TFCT et l'on pourrait le schématiser comme le produit d'une ondelette (détectant les changements brusques) par une fonction oscillante (révélant les variations régulières). Le second système est beaucoup plus naturel : une ondelette de Malvar est une fonction commençant par une attaque brève, suivie d'un plateau et se terminant *descrescendo*, évoquant l'émission d'une note de musique, on 'remplit' ensuite cette fonction de sinus ou de cosinus.

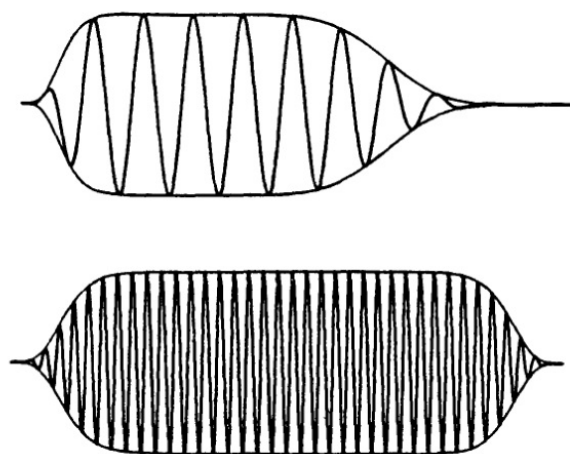


FIGURE 4.2 – Deux ondelettes de Malvar.

# Bibliographie

- [1] B. Burke Hubbard. *Ondes et ondelettes, la saga d'un outil mathématiques*. Belin, 1995.
- [2] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communication on Pure and Applied Mathematics*, 1988.
- [3] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, 1992.
- [4] S. Drapeau and A. Leclaire. *Ondelettes, construction et applications*, 2010. <http://sary-aurelien.drapeau.perso.luminy.univ-amu.fr>.
- [5] M. El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008.
- [6] E. Hernandez and G. Weiss. *A First Course on Wavelets*. CRC Press, 1996.
- [7] C. Ole. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Springer, 2002.